इकाई - 2 पूर्ण संख्याएँ

AI_4BCK

- ❖ पूर्ण संख्याएँ
- ❖ संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं का प्रदर्शन
- ❖ क्रमागत पूर्ण संख्याएँ
- ❖ पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ तथा गुणधर्म

2.1. भूमिका :

आपने प्राकृतिक संख्याओं के विषय में जानकारी प्राप्त कर ली है। क्या हमारा काम इन्हीं संख्याओं से चल सकता है ? यह एक विचारणीय प्रश्न है। आवश्यकतानुसार प्राकृतिक संख्याओं के समूह को पूर्ण संख्याओं के समूह में विस्तारित करना होगा तथा पूर्ण संख्याओं पर होने वाली विभिन्न संक्रियाओं (जोड़, घटाना, गुणा एवं भाग) को ध्यानपूर्वक देखने से उनके अनेक प्रगुण (नियम) दिखाई देते हैं। इन प्रगुणों (नियम) को यथास्थान प्रयोग करने से संक्रियाओं को सरल बनाया जा सकता है।

2.2 पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)

आइए, यह स्थिति देखिए -

पेड़ पर कितनी चिड़ियाँ बैठी हैं?
पेड़ पर दो चिड़ियाँ बैठी हैं।

चित्र 1

पेड़ पर कितनी चिड़ियाँ बैठी हैं?
पेड़ पर एक चिड़ियाँ बैठी है।

चित्र 2

पेड़ पर कितनी चिड़ियाँ बैठी हैं?
पेड़ पर कोई चिड़ियाँ नहीं बैठी हैं।

चित्र 3

चित्र 1 एवं चित्र 2 में आप वृक्ष पर बैठी चिड़ियों की संख्या बता सकते हैं, लेकिन तीसरे वृक्ष पर चिड़ियों की स्थिति को क्या आप किसी संख्या द्वारा बता सकते हैं? अभी तक हमें जिन गिनती की संख्याओं 1, 2, 3,...

की जानकारी हो चुकी है, उनमें ऐसी कोई संख्या नहीं है जिसके द्वारा हम तीसरे वृक्ष पर बैठी चिड़ियाँ को बता सकें। इसे हम संख्यांक 0 (शून्य) द्वारा व्यक्त करते हैं। अर्थात् हमें संख्या 0 की आवश्यकता है। आइए, अब हम संख्याओं 0, 1, 2, 3,... के विषय में जानें।

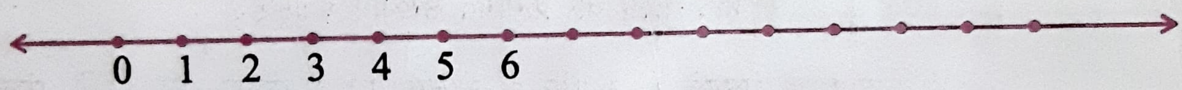
एक डिब्बे में 10 गोलियाँ लीजिए। इन गोलियों को 10 शिक्षार्थियों में बराबर - बराबर बाँटिए। प्रत्येक शिक्षार्थी को 1-1 गोली मिली, डिब्बे में कितनी गोलियाँ बचीं ? स्पष्ट है कि डिब्बे में एक भी गोली नहीं बची। डिब्बे में बची हुई अर्थात् शेष गोलियों की संख्या शून्य '0' होगी। जब हम '0' को भी प्राकृतिक संख्याओं के साथ सम्मिलित कर लेते हैं तो प्राप्त संख्याएँ '**पूर्ण संख्याएँ**' कहलाती हैं।

इस प्रकार

> **0, 1, 2, 3, 4, ... पूर्ण संख्याएँ हैं। 0 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है। चूँकि प्रत्येक पूर्ण संख्या से बड़ी पूर्ण संख्याएँ होती हैं, अतः कोई भी पूर्ण संख्या सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं होती है ।**

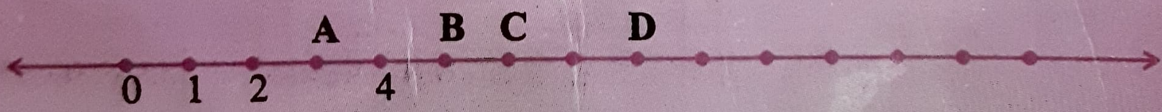
2.3. संख्या-रेखा पर पूर्ण संख्याओं का प्रदर्शन

संख्या - रेखा पर 0 से प्रारम्भ करके सामान दूरी पर पूर्ण संख्याएँ प्रदर्शित कीजिए, यथा -



प्रयास कीजिए

1. नीचे की संख्या - रेखा देखकर बताइए कि बिन्दुओं A, B, C तथा D द्वारा कौन सी पूर्ण संख्याएँ निरूपित होती हैं ?



2. 1 की पूर्ववर्ती पूर्ण संख्या बताइए ।
3. 13 की पूर्ववर्ती पूर्ण संख्या बताइए ।
4. 14 की अनुवर्ती पूर्ण संख्या क्या है ?

2.4. क्रमागत पूर्ण संख्याएँ :

निम्नांकित संख्याओं के प्रत्येक समूह पर ध्यान दें,

2, 3, 4 ; 7, 8, 9 ; 15, 17, 20

प्रथम और द्वितीय समूह की संख्याएँ बायें से दायें क्रमशः 1-1 के अन्तर से बढ़ रही हैं। कैसे?

चलिए तीन से अधिक संख्याओं का एक अन्य समूह 8, 9, 10, 11, 12 लेते हैं। इस समूह की संख्याओं की क्या विशेषता है ?

इस समूह की संख्याएँ भी क्रमशः 1-1 के अन्तर से बढ़ रही हैं। समूह में आगे आने वाली कोई भी संख्या अपने ठीक पहले की संख्या की उत्तरवर्ती संख्या है। किसी समूह की इस विशेषता वाली सभी संख्याएँ क्रमागत संख्याएँ कहलाती हैं। इस प्रकार प्रथम समूह एवं द्वितीय समूह की संख्याएँ 2, 3, 4 एवं 7, 8, 9 भी क्रमागत संख्याएँ हैं।

क्या उपर्युक्त तृतीय समूह की संख्याएँ 15, 17, 20 क्रमागत संख्याएँ हैं ? स्पष्टतः नहीं, क्योंकि 15, 17, 20 क्रमशः 1 - 1 के अन्तर से नहीं बढ़ रहीं हैं। दूसरे शब्दों में 17, 15 की अनुवर्ती नहीं है, और 20, 17 की अनुवर्ती नहीं है।

ध्यान दीजिए :

इसी प्रकार 13, 14 और 15 ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं जो एक क्रम में हैं। ऐसी पूर्ण संख्याओं को क्रमागत पूर्ण संख्याएँ कहते हैं। दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं का अन्तर सदैव 1 होता है ।

प्रयास कीजिए :

1. 100 से ठीक पहले की दो क्रमागत पूर्ण संख्याएँ बताइए ।
2. 101 से प्रारम्भ होने वाली चार क्रमागत संख्याएँ बताइए ?
3. तीन क्रमागत संख्याएँ 3, 4 और 5 लीजिए। पहली संख्या और तीसरी संख्या जोड़िए। योगफल का आधा कीजिए । उत्तर से बीच वाली संख्या की तुलना कीजिए।

आप पायेंगे कि :

तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी संख्याओं के योगफल का आधा बीच की संख्या होती है।

उदाहरण 1. तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी का योगफल 40 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : पहली और तीसरी संख्या का योगफल = 40

∴ पहली और तीसरी संख्या के योगफल का आधा $= \frac{40}{2} = 20$

∴ बीच की संख्या = 20

अतः संख्याएँ 19, 20, 21 हैं ।

1. सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए।
2. संख्या रेखा पर निम्नांकित पूर्ण संख्याओं को प्रदर्शित कीजिए।
   0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3. तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी का योगफल 28 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. यदि तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में मध्य की संख्या 39 हो तो तीनों संख्याँ ज्ञात कीजिए
5. प्राकृतिक संख्याओं के समूह में किस संख्या के सम्मिलित कर लेने पर वह पूर्ण संख्याओं का समूह बन जाता है।

2.5 पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाएँ तथा गुणधर्म

2.5.1 पूर्ण संख्याओं में योग का प्रगुण :

(i) योग का संवरक प्रगुण :

पूर्ण संख्याओं के विभिन्न युग्म (जोड़े)लीजिए, जैसे -

(5, 7), (3, 4), (0, 3) और (0, 0)

प्रत्येक युग्म की संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए ।

पूर्ण संख्या + पूर्ण संख्या	योगफल	पूर्ण संख्या है या नहीं
5 + 7	12	पूर्ण संख्या है ।
3 + 4	☐	पूर्ण संख्या है ।
0 + 3	☐	पूर्ण संख्या है ।
0 + 0	☐	पूर्ण संख्या है ।

पूर्ण संख्याओं के ऐसे ही तीन और युग्म लेकर उनके योगफल ज्ञात कर उनका परीक्षण कीजिए। क्या योगफल सदैव पूर्णसंख्या ही आता है ?

क्या पूर्ण संख्याओं का एक भी युग्म ऐसा मिला जिसका योगफल एक पूर्णसंख्या नहीं है ? ऐसी कोई भी दो पूर्ण संख्याएँ प्राप्त नहीं की जा सकतीं जिनका योगफल एक पूर्णसंख्या न हो ।

निष्कर्ष :

दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव पूर्ण संख्या होता है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवरक प्रगुण है।

(ii) योग का क्रम-विनिमेय प्रगुण :

राधा एक दुकान से पहले 3 टाफियाँ खरीदती है और पुनः 2 टाफियाँ। राधा ने कुल कितनी टाफियाँ खरीदीं ?

महमूद भी उसी दुकान से टाफियाँ खरीदता है। वह पहले 2 टाफियाँ खरीदता है और फिर 3 टाफियाँ। महमूद ने कुल कितनी टाफियाँ खरीदीं ?

राधा और महमूद प्रत्येक ने कुल 5 टाफियाँ खरीदीं।

कोई दो पूर्ण संख्याएँ जैसे 3 और 5 लीजिए और उन्हें जोड़कर रिक्त स्थान भरिए ।

$$3 + 5 = \square$$

पुन संख्याओं के क्रम बदल कर योगफल ज्ञात कीजिए :

$$5 + 3 = \square$$

दोनों स्थितियों में योगफल की तुलना कीजिए ।

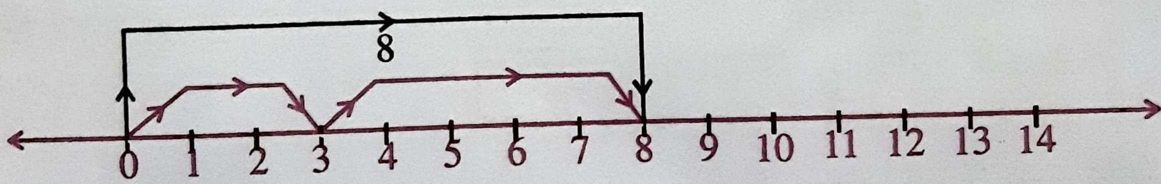
$$3 + 5 = 8 = 5 + 3$$

हम देखते हैं कि :

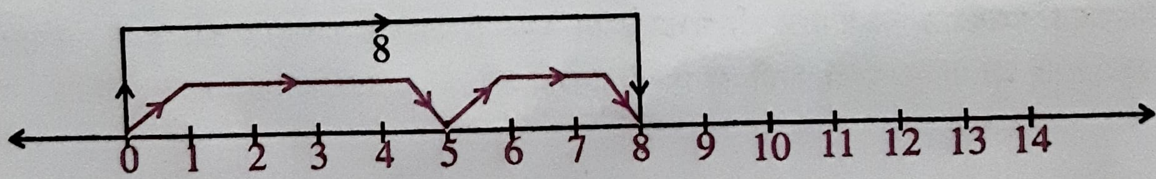
$$3 + 5 = 5 + 3$$

इस तथ्य को हम संख्या रेखा द्वारा भी समझ सकते हैं ।

संख्या-रेखा खींचकर 3 + 5 का योगफल ज्ञात कीजिए ।



इसी प्रकार दूसरी संख्या रेखा खींचिए और 5 + 3 का योगफल प्राप्त कीजिए ।



हम देखते हैं कि दोनों स्थितियों में संख्या-रेखा पर प्राप्त योगफल समान हैं ।

अत : $3 + 5 = 5 + 3$

जाँच कीजिए :

पूर्ण संख्याओं के दो अन्य जोड़े जैसे (3, 4) और (6, 2) लेकर जाँच कीजिए ।

$3 + 4 = 7$ तथा $4 + 3 = 7$

इसलिए $3 + 4 = 4 + 3$

इसी प्रकार $6 + 2 = 8$ तथा $2 + 6 = 8$

इसलिए $6 + 2 = 2 + 6$

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

दो पूर्ण संख्याओं के योगफल पर संख्याओं के क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(iii) योग का तत्समक अवयव : (Additive Identity)

आप देख चुके हैं कि पूर्ण संख्याओं का संग्रह प्राकृतिक संख्याओं के संग्रह से किस रूप में भिन्न है । पूर्ण संख्याओं के संग्रह में केवल 'शून्य' की उपस्थिति के कारण यह प्राकृतिक संख्याओं के संग्रह से अलग हो जाता है। इस संख्या 'शून्य' की योग में एक विशेष भूमिका है । आइए, इसे देखने के लिए निम्नांकित प्रयास करें :

कुछ पूर्ण संख्याएँ, जैसे 0, 1, 3, 5 लेकर निम्नांकित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$0 + 0 = \square$

$0 + 1 = \square$

$0 + 3 = 3 + 0 = \square$

$0 + 5 = 5 + 0 = \square$

आप देख सकते हैं कि :

किसी पूर्ण संख्या में यदि शून्य को जोड़ा जाता है तो योगफल वही संख्या होती है। इसी कारण '0' को पूर्णसंख्याओं में योग का तत्समक अवयव कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए 'योज्य तत्समक' भी कहते हैं।

(iv)योग का साहचर्य प्रगुण :

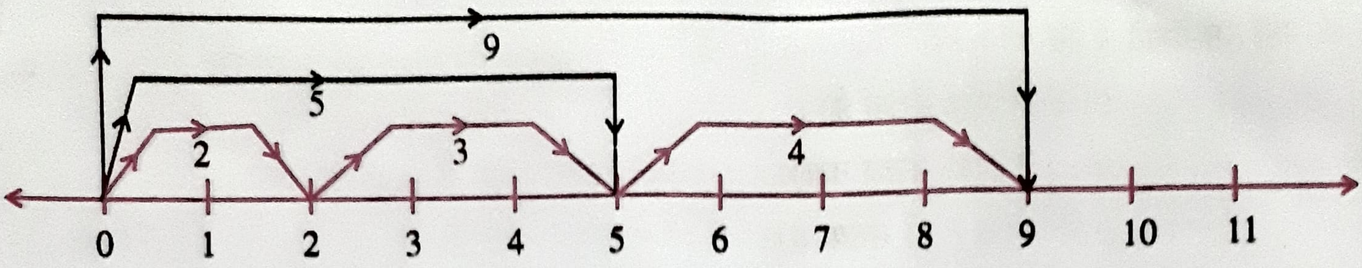
यदि 2, 3 और 4 का योगफल संख्याओं के इसी क्रम में हमें ज्ञात करना है तो इसे हम दो प्रकार से कर सकते हैं । पहले 2 और 3 का योगफल ज्ञात कर उसमें 4 जोड़ सकते हैं अथवा 3 और 4 के योगफल ज्ञात कर लें और पुनः 2 में इस योगफल को जोड़ें। दोनों स्थितियों में हमें योगफल वही संख्या प्राप्त होती है, यथा —

$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

और $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

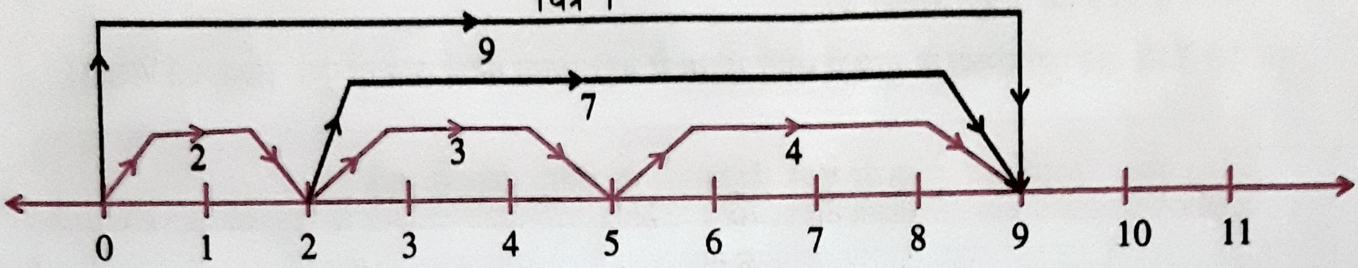
आइए, संख्या रेखा पर इसकी जाँच करते हैं :

संख्या रेखा की सहायता से 2, 3 और 4 के योगफल को दो प्रकार से दिखाइए ।



$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

चित्र 1



$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

चित्र 2

चित्र 1 और चित्र 2 से हम पाते हैं कि

$$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$$

इसी प्रकार से पूर्ण संख्याओं 8, 4, 9 को क्रम में संख्या-रेखा पर जोड़ेंगे तो पायेंगे

$$(8 + 4) + 9 = 8 + (4 + 9)$$

निष्कर्ष :

तीन पूर्ण संख्याओं को क्रम में जोड़ते समय किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का समूह पहले बना लेने से योगफल में अन्तर नहीं पड़ता है । यह योग संक्रिया का साहचर्य प्रगुण है ।

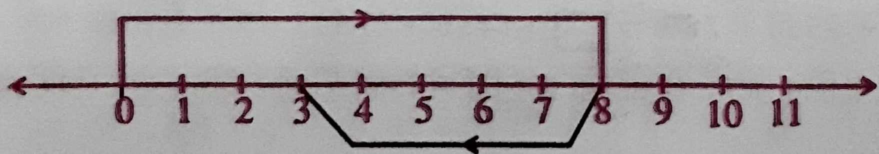
2.5.2. पूर्ण संख्याओं पर घटाने का संवरक प्रगुण

पूर्ण संख्या के कुछ युग्म लीजिए जैसे

8, 5; 5, 9; 10, 0; 0, 7 और 8, 8

प्रत्येक युग्म की प्रथम संख्या से द्वितीय संख्या को घटाइए।

8 - 5 को संख्या रेखा पर निम्नांकित रूप में प्रदर्शित करते हैं :-



$8 - 5 = 3$

इसी प्रकार अन्य युग्म की संख्याओं के घटाने को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

यहाँ हम देखते हैं कि

8 − 5 = 3 (पूर्ण संख्या है)

5 − 9 = ? (पूर्ण संख्या नहीं)

10 − 0 = 10 (पूर्ण संख्या है)

0 − 7 = ? (पूर्ण संख्या नहीं)

8 − 8 = 0(पूर्ण संख्या है)

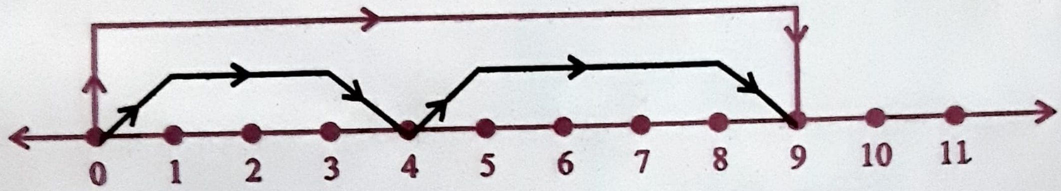
हम पाते हैं कि यदि पूर्ण संख्या के युग्म में छोटी संख्या से बड़ी संख्या घटाई जाय तो पूर्ण संख्या नहीं मिलती।

अतः घटाने की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिए संवरक नहीं है।

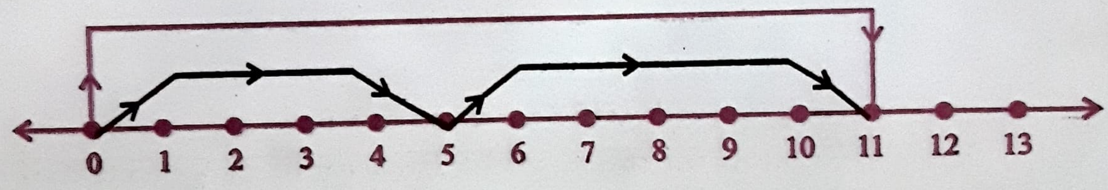
अभ्यास 2 (b)

1. संख्या रेखा पर अंकित योग तथ्यों को लिखिए :

(i)



(ii)



2. निम्नांकित तथ्यों को संख्या रेखा पर दिखाइए :

(i) 5 + 4 = 9

(ii) 0 + 5 = 5

(iii) 2 + 3 + 4 = 9

3. निम्नांकित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) 345 + 789 = ☐ + 345

(ii) 2889 + 0 = ☐

(iii) (234 + 456) + 789 = ☐ + (456 + 789)

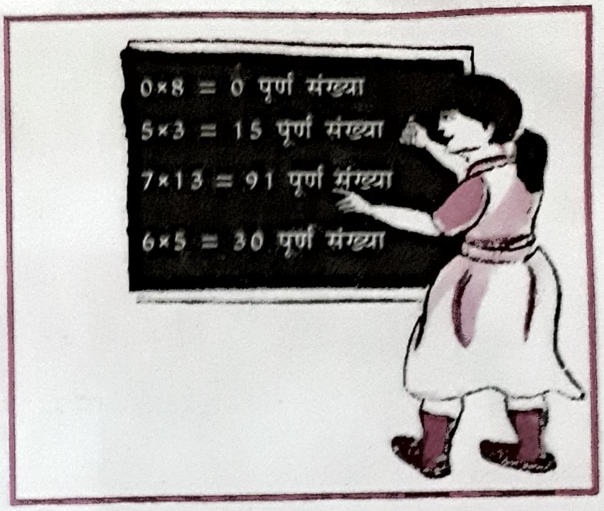
4. पूर्ण संख्याओं के लिए घटाने की संक्रिया क्रम-विनिमेय नहीं हैं। तीन विभिन्न युग्म लेकर इसकी जाँच कीजिए।

2.5.3. पूर्ण संख्याओं में गुणा के प्रगुण :

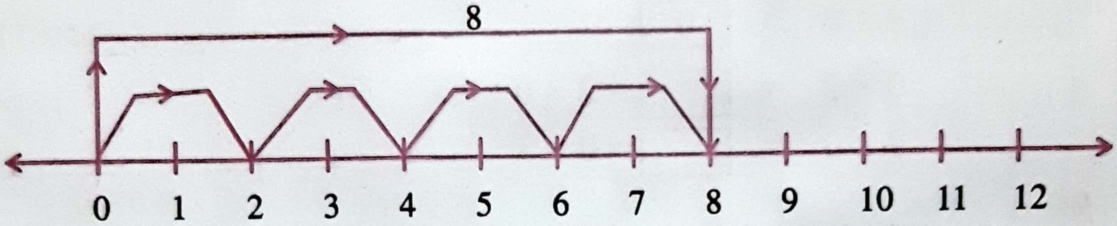
(i) गुणन का संवरक प्रगुण :

पूर्ण संख्याओं के युग्म लीजिए जैसे (0,8) (5,3) (7,13) और (6,5) और युग्म की संख्याओं को परस्पर गुणा करने पर देखते हैं कि प्रत्येक दशा में गुणनफल एक पूर्ण संख्या है।

अतः पूर्ण संख्याएँ गुणा के संवरक नियम का पालन करती हैं।



इसे निम्नांकित संख्या रेखा द्वारा समझ सकते हैं।



$2 \times 4 = 8$ पूर्ण संख्या है।

प्रयास कीजिए :

संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं के जोड़े जैसे 6, 4; 5, 8 और 3, 10 में से प्रत्येक के गुणनफल प्राप्त कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या गुणनफल एक पूर्ण संख्या है ।

निष्कर्ष :

पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव पूर्ण संख्या होता है । यह गुणन संक्रिया का संवरक प्रगुण है ।

(ii) गुणा का क्रम-विनिमेय प्रगुण :

पूर्ण संख्याओं के कुछ जोड़े (3, 5), (2, 7) और (9,13) लीजिए। पहली संख्या का दूसरी संख्या से तथा दूसरी संख्या का पहली संख्या से प्राप्त गुणनफल की तुलना कीजिए।

पूर्ण संख्या युग्म में उनके क्रम को बदल देने पर भी गुणनफल समान होता है।

यथा $3 \times 5 = 15$

$5 \times 3 = 15$

निष्कर्ष :

पूर्ण संख्या युग्म में उनके क्रम को बदल देने पर भी गुणनफल समान होता है। इसे गुणन संक्रिया का क्रम-विनिमेय प्रगुण कहते हैं ।

प्रयास कीजिए :

संख्या युग्म 2,3; 12,5; 6,4 और 0,7 द्वारा गुणा के क्रम-विनिमेय प्रगुण की पुष्टि कीजिए।

(iii) शून्य का गुणन प्रगुण :

निम्नांकित गुणन संक्रिया सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए -

$0 \times 0 = \boxed{0}$

$0 \times 2 = \boxed{} = 2 \times 0$

$3 \times 0 = \boxed{} = 0 \times 3$

प्रयास कीजिए :

कुछ पूर्ण संख्याएँ स्वयं लेकर उन्हें 0 से गुणाकर गुणनफल का अवलोकन कीजिए । क्या प्रत्येक बार गुणनफल शून्य प्राप्त होता है ?

निष्कर्ष :

किसी पूर्ण संख्या और शून्य का गुणनफल सदैव ''शून्य'' होता है ।

(iv) गुणन का तत्समक अवयव : (Multiplicative Identity)

निम्नांकित गुणन संक्रिया सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

$1 \times 0 = 0 \times 1 = \boxed{}$

$1 \times 1 = \boxed{}$

$1 \times 2 = 2 \times 1 = \boxed{}$

$1 \times 3 = 3 \times 1 = \boxed{}$

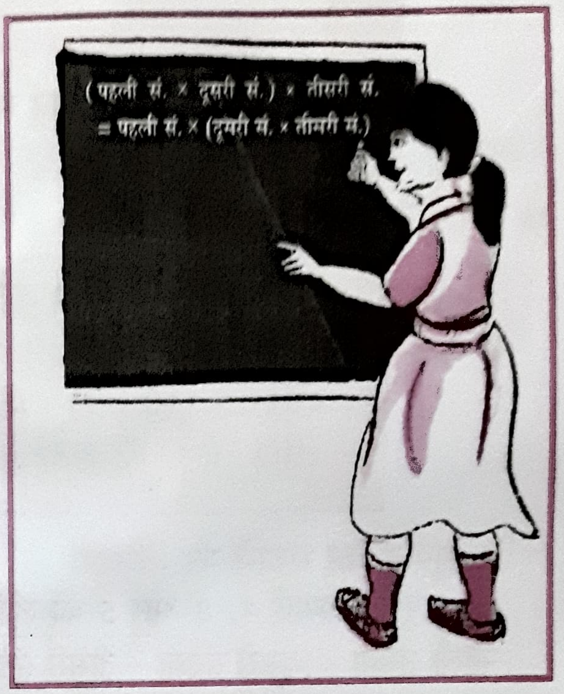
प्रयास कीजिए :

कुछ और पूर्ण संख्याएँ जैसे 5, 8, 17, 31 आदि लेकर उन्हें 1 से गुणा कीजिए । प्रत्येक बार आप देखेंगे कि गुणनफल वही संख्या है जिसमें आप 1 से गुणा करते हैं ।

✌ **निष्कर्ष :** किसी पूर्ण संख्या और '1' का गुणनफल वही संख्या आती है ।

'1' को गुणन का तत्समक अवयव कहते हैं ।

(v) गुणन का साहचर्य प्रगुण :



किन्ही तीन पूर्ण संख्याओं को लीजिए, जैसे 3,8 और 5 सर्वप्रथम पहली संख्या का दूसरी संख्या से गुणा कीजिए और गुणनफल का पुनः तीसरी संख्या से गुणा करें। तीनों का परिणामी गुणनफल लिखिए, फिर दूसरी संख्या और तीसरी संख्या के गुणनफल से पहली संख्या में गुणा करने के बाद परिणामी गुणनफल लिखिए।

अर्थात

(पहली संख्या × दूसरी संख्या) × तीसरी संख्या = पहली संख्या × (दूसरी संख्या × तीसरी संख्या)

हम देखते हैं कि दोनों स्थितियों में तीनों संख्याओं का गुणनफल समान है।

इसी प्रकार तीन अन्य पूर्ण संख्याओं को लेकर जाँच कीजिए-

✌ **निष्कर्ष :**

किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं के सतत् गुणन संक्रिया में संख्याओं के क्रम को परिवर्तित करने पर गुणनफल अपरिवर्तित रहता है। अतः गुणन की संक्रिया पूर्ण संख्याओं में साहचर्य है।

प्रयास कीजिए :

पूर्ण संख्याएँ 6, 9 और 11 लेकर गुणा के साहचर्य नियम की पुष्टि कीजिए।

(vi) गुणन संक्रिया का योग पर वितरण

पूर्ण संख्याएँ 3, 6 और 8 को लीजिए और दिखाइये कि पहली संख्या से दूसरी तथा तीसरी संख्या के योग का गुणनफल, पहली संख्या का दूसरी संख्या से और पहली संख्या का तीसरी संख्या से गुणनफल के योग के बराबर है।

इसी प्रकार तीन अन्य पूर्ण संख्याओं को लेकर-जाँच कीजिए-

✌ निष्कर्ष :

किन्ही तीन पूर्ण संख्याओं के लिए-

पहली सं. × (दूसरी सं.+तीसरी सं.)= पहली सं. × दूसरी सं. + पहली सं. × तीसरी सं.

इसे गुणनसंक्रिया का योग पर वितरण प्रगुण कहते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कथनों की सत्यता का परीक्षण कीजिए :

(i) $9 \times (8 + 4) = (9 \times 8) + (9 \times 4)$

(ii) $6 \times (10 + 7) = (6 \times 10) + (6 \times 7)$

(iii) $11 \times (12 + 8) = (11 \times 12) + (11 \times 8)$

(vii) गुणन का घटाने पर वितरण

पूर्ण संख्याएँ 4, 8 और 5 को लीजिए और दिखाइए कि

पहली संख्या × (दूसरी संख्या – तीसरी संख्या) = पहली संख्या × दूसरी संख्या – पहली संख्या × तीसरी संख्या

अतः गुणन का घटाने पर वितरण नियम लागू है।

अभ्यास 2 (c)

1. अपनी अभ्यास पुस्तिका में गुणन-संक्रिया के प्रगुणों के आधार पर निम्नांकित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

   (i) $468 \times 0 = \square$

   (ii) $8976 \times 5432 = 5432 \times \square$

   (iii) $8973 \times 1 = \square$

2. निम्नलिखित का गुणनफल उचित प्रगुण का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए ।

   (i) $4 \times 2834 \times 25$

   (ii) $5 \times 658 \times 80$

   (iii) $25 \times 4837 \times 40$

3. वितरण प्रगुण का प्रयोग करके निम्नांकित में से प्रत्येक का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

   (i) 487×1008

   (ii) 998×436

   (iii) 6754×94

   (iv) 26478×106

2.5.4. पूर्ण संख्याओं में भाग की संक्रिया

भाग संक्रिया, गुणन संक्रिया की विलोम होती है, जैसे $4 \times 5 = 20$ तो $20 \div 4 = 5$ तथा $20 \div 5 = 4$ । अब भाग संक्रिया के प्रगुणों पर विचार करें।

(i) भाग की संक्रिया में संवरक प्रगुण का परीक्षण

पूर्ण संख्याओं के जोड़े लीजिए जैसे 24,6; 17,4; 7,8; 0,5 एवं 9,9

प्रत्येक जोड़े की प्रथम संख्या में दूसरी से भाग दीजिए।

हम देखते हैं कि प्रत्येक दशा में प्रथम पूर्ण संख्या में दूसरी पूर्ण संख्या से भाग देने पर पूर्ण संख्या नहीं प्राप्त होती है ।

विभाजन की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिये संवरक नहीं हैं।

(ii) शून्य से पूर्ण संख्याओं में भाग का परीक्षण :

घटाने की विधि से पूर्ण संख्या 8 में "0" से भाग का परीक्षण करें तो

$$\begin{array}{r} 8 \\ -0 \\ \hline 8 \end{array} \quad \text{एक बार घटाने पर}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ -0 \\ \hline 8 \end{array} \quad \text{दो बार घटाने पर}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ -0 \\ \hline 8 \end{array} \quad \text{तीन बार घटाने पर}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि 8 में से 0 चाहे जितनी बार घटाएं, हमें शेषफल '0' कभी नहीं मिलेगा ।

अत :

किसी पूर्ण संख्या में शून्य से भाग परिभाषित नहीं है ।

(iii) पूर्ण संख्याओं में '1' से भाग का परीक्षण :

निम्नांकित भाग की संक्रियाएं देखिए ।

$2 \div 1 = 2$

$3 \div 1 = 3$

$4 \div 1 = 4$

किसी पूर्ण संख्या में '1' से भाग देने पर भागफल सदैव वही संख्या प्राप्त होती है।

(iv) शून्य में किसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग का परीक्षण :

हम देखते हैं कि :

$0 \div 5 = 0$

$0 \div 6 = 0$

शून्य में किसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल सैदव शून्य प्राप्त होता है

(v) किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग का परीक्षण :

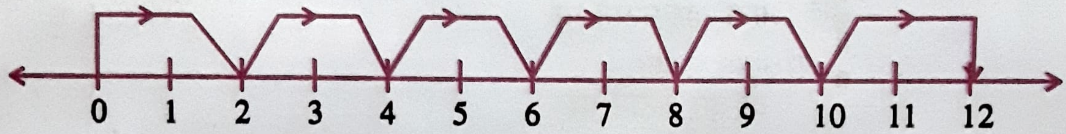
हम देखते हैं कि :

$$2 \div 2 = 1$$
$$3 \div 3 = 1$$
$$4 \div 4 = 1$$

किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव 1 आता है।

अभ्यास 2 (d)

1. निम्नांकित संख्या रेखा द्वारा विभाजन तथ्य को बताइए ।



2. $21 \div 3 = 7$ के संगत गुणात्मक तथ्य $3 \times 7 = 21$ है । अतः निम्नांकित तथ्यों के संगत गुणात्मक तथ्य बताइए। (i) $56 \div 8 = 7$
   (ii) $66 \div 11 = 6$
3. 117 को दो संख्याओं के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए जिसकी एक संख्या 13 है ।
4. क्या ऐसी कोई पूर्ण संख्या सम्भव है जिसको स्वयं से विभाजित करने पर वही संख्या प्राप्त होती है।
5. क्या दो विभिन्न शून्येतर पूर्ण संख्याओं के लिए पहली संख्या को दूसरी संख्या से विभाजित करने पर तथा दूसरी संख्या को पहली संख्या से विभाजित करने पर समान भागफल प्राप्त होता है ?

राष्ट्रीय आय एवं योग्यता आधारित छात्रवृत्ति परीक्षा प्रश्न

1. 80 और 90 के बीच अभाज्य संख्या है :

   (क) 81 और 83 (ख) 83 और 87

   (ग) 81 और 89 (घ) 83 और 89

   (वर्ष 2005)
   (उ. घ)

2. इस प्रश्न में पाँच पद हैं। चार पद किसी न किसी रूप में एक से हैं, और एक पद अन्य चारों से भिन्न है। अन्य से भिन्न पद की संख्या को उत्तर पत्र पर संगत प्रश्न के सम्मुख वृत्त से घेरिए

   (क) 6, 3, 18 (ख) 7, 5, 35

   (ग) 9, 3, 27 (घ) 5, 4, 26

   (च) 8, 7, 56

   (उ. घ)

3 दिये गये पाँच विकल्पों में से लुप्त पद को ज्ञात कीजिए तथा उसकी संख्या को सही प्रश्न संख्या के सामने उत्तर पत्रक पर लिखिए।

196, 169, 144, 121, 100, ?

(क) 85 (ख) 90

(ग) 81 (घ) 64

(च) 95

(उ. ग)

इस इकाई में हमने सीखा

1. क्रम से एक के बाद एक आने वाली संख्याएँ क्रमागत संख्याएँ कहलाती हैं।
2. शून्य (0) को प्राकृतिक संख्याओं के साथ सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 'पूर्ण संख्याएँ' कहलाती हैं।
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या '0' है।
4. कोई भी पूर्ण संख्या सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नहीं होती हैं, क्योंकि उसकी भी अनुवर्ती एक पूर्ण संख्या होती है।
5. यदि दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ा जाता है, तो योगफल सदैव पूर्ण संख्या होता है । पूर्ण संख्याओं में यह योग का **संवरक प्रगुण** है ।
6. दो पूर्ण संख्याओं के योग पर संख्याओं के क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता । यह पूर्ण संख्याओं में योग का **क्रम-विनिमेय** प्रगुण है ।
7. किसी पूर्ण संख्या में 0 जोड़ने पर योगफल वही संख्या होती है । अतएव '0' को पूर्ण संख्याओं में **योग का तत्समक अवयव** कहते हैं ।
8. तीन पूर्ण संख्याओं को जोड़ते समय किन्हीं दो का समूह पहले बना लेने से योगफल में कोई अन्तर नहीं पड़ता। पूर्ण संख्याओं में यह योग संक्रिया का **साहचर्य प्रगुण** है ।
9. पूर्ण संख्याओं में घटाने की संक्रिया संवरक नहीं है ।
10. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव पूर्ण संख्या होता है । यह पूर्ण संख्याओं में गुणन संक्रिया का **संवरक प्रगुण** है ।
11. दो पूर्ण संख्याओं का आपस में गुणा करने में क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता । पूर्ण संख्याओं में यह गुणन संक्रिया का **क्रम विनिमेय प्रगुण** है ।
12. किसी पूर्ण संख्या और शून्य का गुणनफल सदैव "शून्य" होता है । यह शून्य का गुणन प्रगुण है।
13. पूर्ण संख्याओं में '1' से गुणा करने पर गुणनफल वही संख्या आती है। अतएव 1 को पूर्ण संख्याओं में **गुणन का तत्समक अवयव** कहते हैं।
14. किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं के सतत् गुणन संक्रिया में संख्याओं के क्रम परिवर्तित कर देने पर गुणनफल अपरिवर्तित रहता है । पूर्ण संख्याओं में यह गुणन संक्रिया का **साहचर्य प्रगुण** है ।

15. पूर्ण संख्याओं में गुणन संक्रिया योग और घटाना दोनों संक्रियाओं पर वितरित होती है ।
16. विभाजन की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिए संवरक नहीं है ।
17. किसी पूर्ण संख्या में शून्य से भाग परिभाषित नहीं है ।
18. किसी पूर्ण संख्या में "1" से भाग देने पर भागफल सदैव वही संख्या प्राप्त होती है ।
19. शून्य को किसी शून्येतर संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव शून्य आता है ।
20. किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने पर भागफल सदैव "1" आता है।

उत्तरमाला

अभ्यास 2 (a)

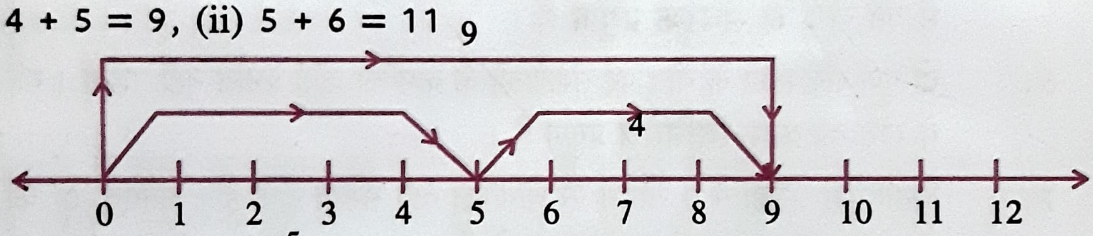
1. 0 ; **2.**

3. 13, 14, 15, **4.** 38, 39, 40 **5.** 0

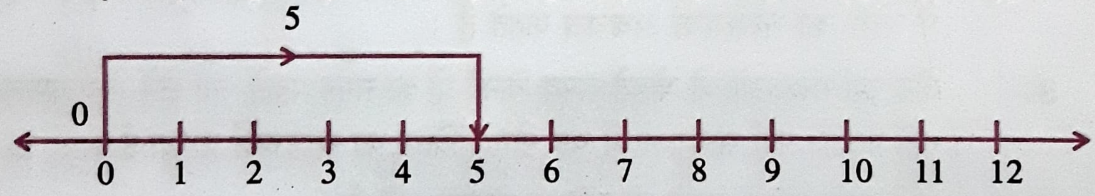
अभ्यास 2 (b)

1. (i) 4 + 5 = 9, (ii) 5 + 6 = 11

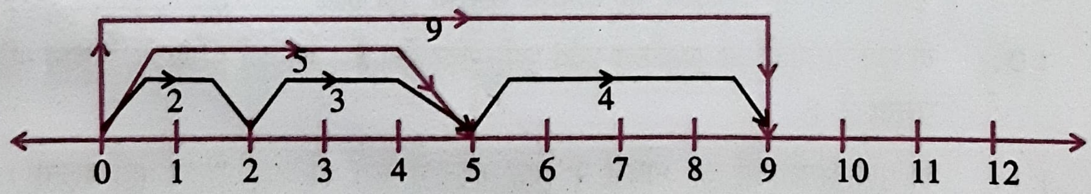
2.(i)



(ii)



(iii)



3. (i) 789, (ii) 2889, (iii) 234

अभ्यास 2 (c)

1. (i) 0, (ii) 8976, (iii) 8973 **2.**(i) 283400, (ii) 263200, (iii) 4837000; **3.**(i) 490896, (ii)435128 (iii) 634876 (iv) 2806668.

अभ्यास 2 (d)

1. 12÷ 2 = 6; **2.** (i) 8 × 7 = 56, (ii) 11 × 6 = 66; **3.** 117 = 13 × 9; **4.** हाँ, वह संख्या 1 है।, **5.** नहीं ।