इकाई : 3 पूर्णांक

- पूर्णांक की संकल्पना
- पूर्णांकों का निरपेक्ष मान
- पूर्णांकों की मूल संक्रियाओं के प्रगुण
- कोष्ठकों का प्रयोग एवं प्रकार
- संख्या रेखा पर पूर्णांक का निरूपण
- BODMAS नियम

3.1 भूमिका

आपने प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ तथा इन संख्याओं का योग, घटाना, गुणा और भाग की संक्रियाओं के नियम सीख लिए हैं। छोटी पूर्ण संख्याओं से बड़ी पूर्ण संख्याओं को घटाने की आवश्यकता पड़ने के कारण पूर्ण संख्याओं का विस्तार किया गया। इसके लिए प्राकृतिक संख्याओं 1, 2, 3. . . के संगत -1,-2,-3. . . नयी संख्याएँ बन गयीं। इस प्रकार पूर्ण संख्याओं का विस्तारित संग्रह पूर्णांकों का संग्रह कहलाया। इस इकाई में पूर्णांकों के बारे में विस्तार से जानेंगे।

3.2 पूर्णांकों की आवश्यकता

मोहन एक कलम खरीदने बाजार जाता है । वहाँ अपनी एक परिचित दुकान पर वह ₹ 12 की एक कलम पसन्द करता है किन्तु उसके पास उस समय केवल ₹ 10 ही हैं । वह दुकानदार को बताता है कि अभी वह यह कलम खरीद नहीं सकता क्योंकि उसके पास कलम के मूल्य के बराबर रुपये नहीं हैं । दुकानदार मोहन को कलम देते हुए कहता है कि जितने रुपये आपके पास हैं, उतने अभी दे दीजिए और बाकी रुपये बाद में दे दीजिएगा। मोहन प्रसन्नचित्त होकर वह कलम ले लेता है और दुकानदार को ₹ 10 दे देता है । बताइए, अभी दुकानदार को कितने रुपये और देने पड़ेंगे ? स्पष्टतः मोहन को अभी दुकानदार को ₹ 2 और देने पड़ेंगे। दुकानदार इन ₹ 2 को मोहन के नाम अपनी डायरी में उधार के रूप में लिख लेगा और जब वह दुकानदार को उधार के ₹ 2 लौटा देगा तो वह अपनी डायरी में मोहन के नाम यह उधार काट देगा। ध्यान दीजिए, दैनिक जीवन में इस तरह की घटनाएँ प्रायः होती रहती हैं। इस उधार की राशि ₹ 2 को किस चिह्न के साथ अंकित करते हैं ? हम केवल रुपयों की उधारी ही नहीं करते, बल्कि कभी-कभी वस्तुओं के रुप में भी उधार लेना पड़ता है । किसान खेतों में बीज बोते समय भी कभी-कभी अपने किसी पड़ोसी अथवा गाँव के व्यक्ति से, जो बीजों को बोने के लिए किसानों को देता है, उधार लेता है और फसल पकने पर उसे लौटाता है । व्यापार में व्यापारी को कभी लाभ होता है तो कभी हानि भी होती है। ऊँचे-ऊँचे आधुनिक बने भवनों में भूतल के ऊपर तो मंजिले होती ही हैं, भूतल के नीचे भी तल बने होते हैं। अतः भूतल से ऊपर और नीचे दोनों ओर ही सीढ़ियाँ बनी होती हैं। यदि भूतल से कोई व्यक्ति नीचे की ओर 5 सीढ़ियाँ उतरता है तो इसे किस प्रकार अंकित करेंगे ?

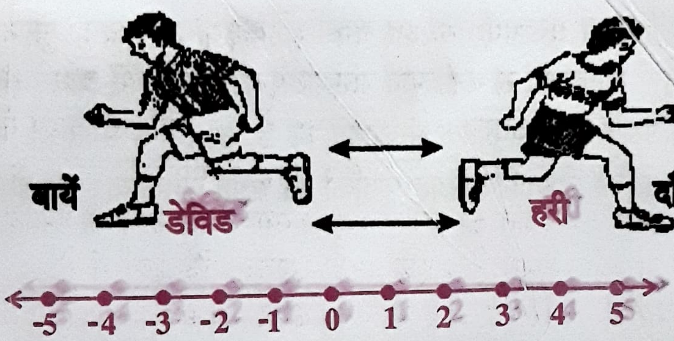
गणितज्ञों ने उपुर्यक्त उदाहरणों में स्पष्टता के लिए उधार ली गयी राशि, भूतल से नीचे उतरी सीढ़ियों की संख्या इत्यादि के साथ चिह्न '-', जिसे ऋण पढ़ते हैं, लगाने की संकल्पना की है । ध्यान दीजिए विपरीत स्थितियों, जैसे लाभ - हानि, आय-व्यय, 0°C से ऊपर और 0°C से नीचे के तापमान, संख्या रेखा पर 0 से दायीं ओर और 0 से बायीं ओर चली गयी दूरियों के मात्रक आदि, में यदि लाभ, आय, 0°C से ऊपर का तापमान और संख्या रेखा पर 0 से दायीं ओर चली गयी दूरी के मात्रक '+' चिह्न से युक्त कर लिखते हैं तो वहीं हानि, व्यय, 0°C से नीचे का तापमान और संख्या रेखा पर 0 से बायीं ओर चली गयी दूरी के मात्रक को '-' चिह्न से युक्त कर लिखते हैं ।

पूर्णांक (Integers) :

हमने पूर्ण संख्याओं के विषय में अध्ययन करते समय देखा कि पूर्ण संख्याओं पर घटाने की संक्रिया में संवरक नियम लागू नहीं होता है, क्योंकि पूर्ण संख्याओं में (–) से युक्त संख्याओं का कोई स्थान नहीं है। परन्तु व्यावहारिक जगत में यह देखा जा रहा है कि (–) से युक्त संख्याएँ भी पूर्ण संख्याओं की तरह महत्वपूर्ण हैं। आइए हम इसे उदाहरण द्वारा समझें।

विपरीतता (Oppositeness)

निम्नांकित चित्र देखिए :



एक खेल में हरी और डेविड में से प्रत्येक 0 से दौड़ना आरम्भ करते हैं । हरी जितने कदम दाहिने जाता है, डेविड उतने ही कदम बायें जाता है । इस प्रकार हरी यदि 5 कदम दाहिने जाता है, तो डेविड 5 कदम बायें जाता है ।

0 से 5 कदम दाहिने और 5 कदम बायें के विस्थापन विपरीतता के बोधक हैं । 0 से दाहिने ओर की दिशा को धनात्मक (+) तथा बायीं ओर की दिशा को ऋणात्मक (-) चिह्नों से व्यक्त करते हैं । इस प्रकार हरी की स्थिति + 5 से तथा डेविड की स्थिति -5 से प्रदर्शित की जायेगी।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित स्थितियों को चिह्न सहित बताइए ।

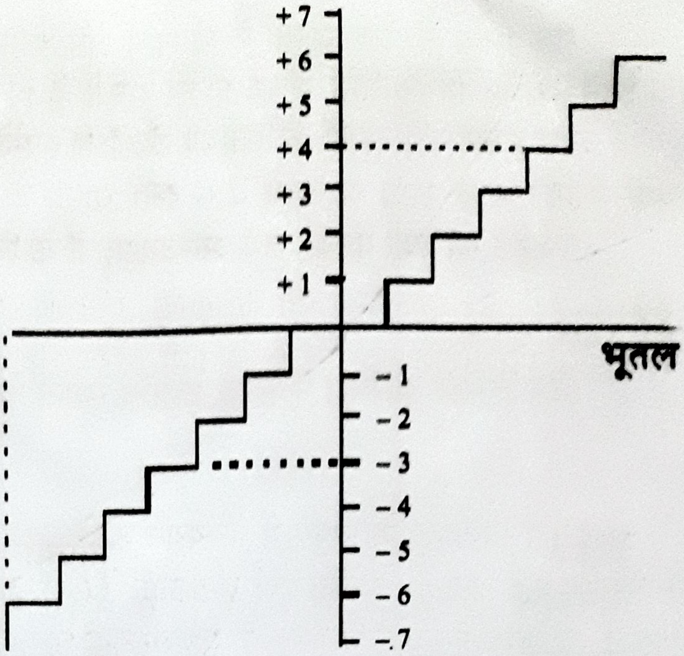
(क) 0 से 8 कदम बायें ।

(ख) 0 से 7 कदम दाँये ।

(ग) 0 से 11 कदम दाँये ।

(घ) 0 से 6 कदम बायें ।

2. मजीद के घर में छत पर चढ़ने के लिए तथा तहखाने में उतरने के लिए सीढ़ियां बनी हैं । सीढ़ियों का चित्र देखिए : स्पष्ट है कि भूतल से ऊपर की दूरियाँ धनात्मक तथा भूतल के नीचे की दूरियाँ ऋणात्मक दर्शायी गयी हैं।



प्रयास कीजिए :

निम्न स्थितियों को चिह्न सहित बताइए :

(क) भूतल से 4 सीढ़ियाँ ऊपर चढ़ने के बाद।
(ख) भूतल से 3 सीढ़ियाँ नीचे उतरने के बाद।
(ग) भूतल से 5 सीढ़ियाँ ऊपर चढ़कर पुनः 2 सीढ़ियाँ और चढ़ने के बाद।
(घ) भूतल से 3 सीढ़ियाँ उतरने और वहाँ से पुनः 4 सीढ़ियाँ उतरने के बाद।
(च) भूतल से 4 सीढ़ियाँ उतरने और पुनः वहाँ से 15 सीढ़ियाँ चढ़ने के बाद।
(छ) भूतल से 5 सीढ़ियाँ उतरने और वहाँ से पुनः 3 सीढ़ियाँ उतरने के बाद।

भूतल से ऊपर की स्थिति को धनात्मक (+) तथा उससे नीचे की स्थिति को ऋणात्मक (-) चिह्न से व्यक्त करते हैं । इस प्रकार उपर्युक्त क्रियाओं में से

प्रथम क्रिया करने पर स्थिति = 4 सीढ़ियाँ ऊपर = + 4

दूसरी क्रिया के बाद की स्थिति = भूतल से 3 सीढ़ियाँ नीचे = - 3

अन्य क्रियाओं के बाद की स्थिति बताइए

(क) + 4	(ख) -3
(ग)	(घ)
(च)	(छ)

विचार कीजिए :

राम प्रसाद दुकानदार की किसी दिन की बिक्री से लाभ और हानि निम्नांकित तालिका में प्रदर्शित है :

	बिक्री की वस्तु	लाभ	हानि
1.	सरसों का तेल	₹ 350.00	—
2.	मूंगफली का तेल	—	₹ 120.00
3.	काली मिर्च	₹ 225.00	—
4.	हल्दी	₹ 225.00	—
5.	आटा	—	₹ 425.00
6.	चावल	₹ 321.00	—

राम प्रसाद के लेखा-जोखा में भी लाभ और हानि विपरीत स्थितियों का बोध कराते हैं । लाभ को धनात्मक तथा हानि को ऋणात्मक चिह्न से व्यक्त कर सकते हैं ।

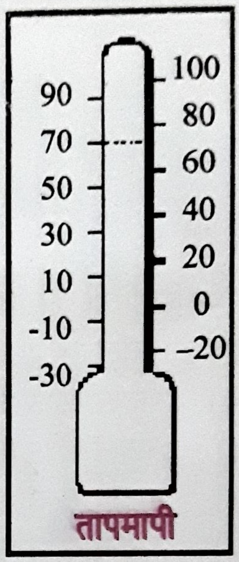
इस प्रकार यदि सरसों के तेल की बिक्री से रुपयों में लाभ = + ₹350, तो मूँगफली के तेल की बिक्री से रुपयों में हानि = ₹ 120 या लाभ = − ₹ 120

उपर्युक्त तालिका में दिये गये अन्य वस्तुओं के बिक्री के लाभ और हानि संगत चिह्न द्वारा व्यक्त कीजिए ।

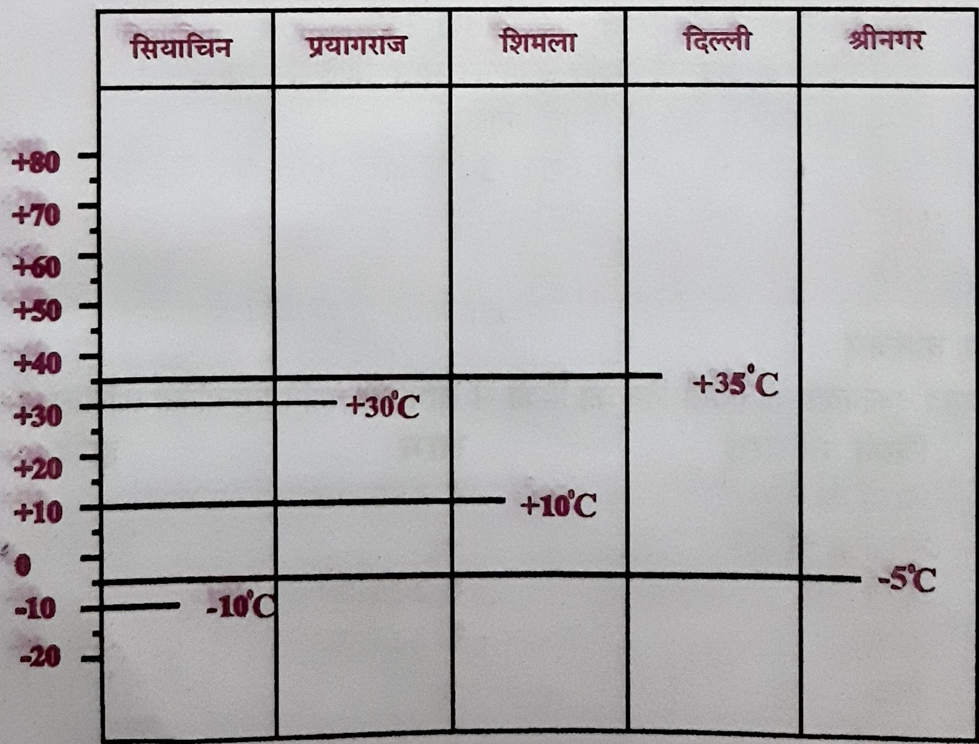
ध्यान दीजिए :

निम्नलिखित तालिका में भारत के पाँच स्थानों के किसी समय के तापमान दिये गये हैं :

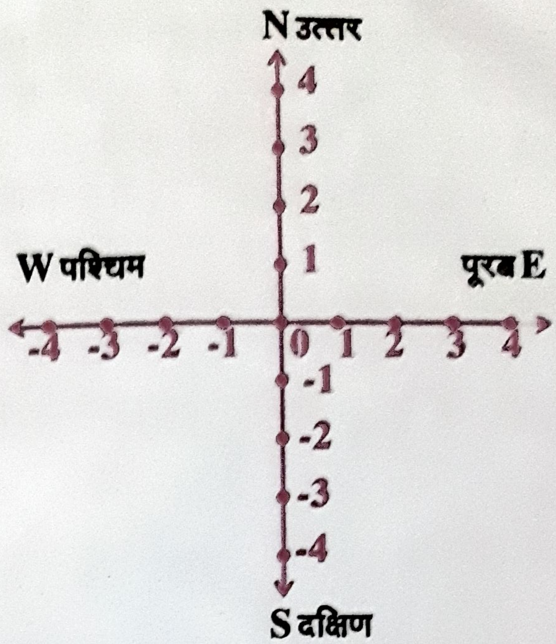
स्थान	तापमान
सियाचीन	0° से 10° सेल्सियस नीचे ।
प्रयागराज	0° से 30° सेल्सियस ऊपर ।
शिमला	0° से 10° सेल्सियस ऊपर ।
दिल्ली	0° से 35° सेल्सियस ऊपर ।
श्रीनगर	0° से 5° सेल्सियस नीचे ।



उपर्युक्त से स्पष्ट है कि तापमापी यन्त्र भी दो विपरीत दिशाओं में मापन करता है । 0°C (0° सेल्सियस) से ऊपर के तापक्रम को धनात्मक (+) तथा 0°C से नीचे के तापक्रम को ऋणात्मक (-) के रूप में व्यक्त कर सकते हैं यथा -



संलग्न चित्र देखिए :



पूरब और पश्चिम परस्पर विपरीत दिशाएं हैं ।

उत्तर और दक्षिण भी परस्पर विपरीत दिशाएं हैं ।

4 मात्रक पूरब का विपरीत 4 मात्रक पश्चिम है । निम्नांकित के विपरीत क्या हैं ?

(क) 3 मात्रक पूरब (ख) 8 मात्रक पश्चिम (ग) 5 मात्रक पूरब

(घ) 2 मात्रक दक्षिण (च) 7 मात्रक उत्तर (छ) 9 मात्रक दक्षिण

(i) O से पूरब की स्थिति को धनात्मक (+) लेते हुए उपर्युक्त प्रश्न के (क), (ख) और (ग) की स्थिति को चिह्न सहित लिखिए।

(ii) O से उत्तर की स्थिति को धनात्मक लेते हुए उपर्युक्त के खण्डों (घ), (च) और (छ) की स्थिति को चिह्न सहित लिखिए ।

पूर्ण संख्याओं के संग्रह को आवश्यकतानुसार विस्तारित करने के लिए इस संग्रह में हम कुछ नयी संख्याओं को सम्मिलित करते हैं । इसके लिए प्राकृतिक संख्याओं 1, 2, 3, 4, ..., के संगत हम इन नयी संख्याओं को निम्नांकित ढंग से बनाते हैं :

1 के संगत -1 (ऋण 1) इस प्रकार बनाते हैं कि : 1 + (-1) = 0

1 और -1 परस्पर विपरीत हैं । 2 के संगत -2 (ऋण 2) इस प्रकार बनाते हैं कि :

2+ (-2) = 0

2 और -2 परस्पर विपरीत हैं । 3 के संगत -3 (ऋण 3) इस प्रकार बनाते हैं कि :

3 + (-3) = 0

इन नयी संख्याओं - 1, -2, -3, ... को ऋणपूर्णांक कहते हैं।

3 और -3 परस्पर विपरीत हैं, आदि। इस प्रकार प्राकृतिक संख्याओं, ऋण पूर्णांकों और शून्य सहित संख्याओं का नया संग्रह निम्नांकित है,

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

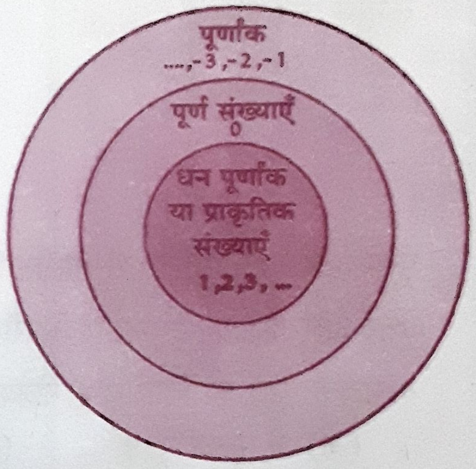
इन्हें हम निम्नांकित प्रकार से भी लिखते हैं

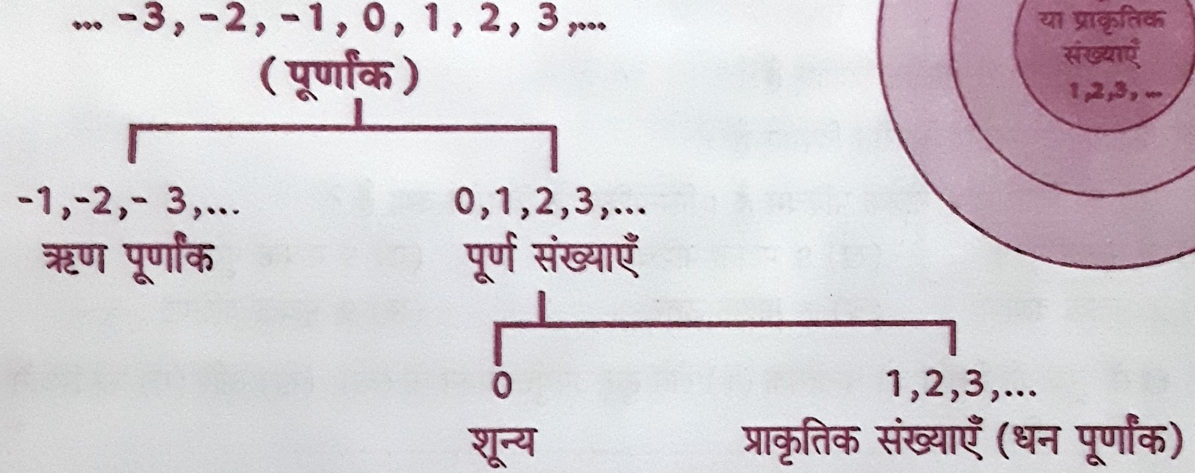
..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

इन सभी संख्याओं को पूर्णांक (**Integers**) कहते हैं ।

1, 2, 3, ... अर्थात् प्राकृतिक संख्याएँ, धन पूर्णांक और -1, -2, -3, ... ॠण पूर्णांक होते हैं। शून्य मात्र एक ऐसा पूर्णांक है, जो न तो धनात्मक है और न ॠणात्मक । धन पूर्णांकों को +1, +2, +3 ... के रूप में भी लिखते हैं । प्रायः इनके पूर्व धन चिह्न को नहीं लिखा जाता है । अतः संख्याएँ 1, 2, 3, ... धन पूर्णांक हैं ।

पूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं तथा प्राकृतिक संख्याओं को निम्नांकित चित्र से समझा जा सकता है ।





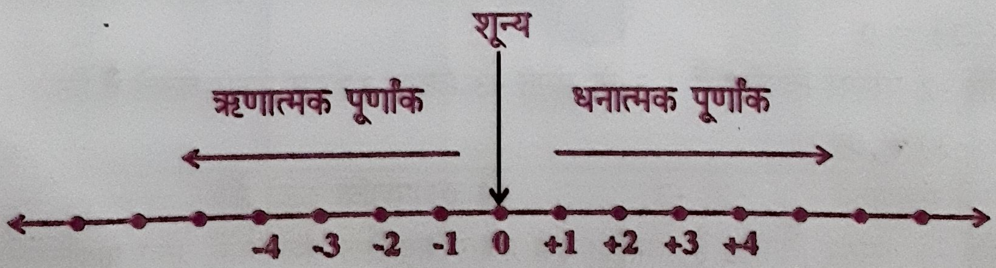
3.3 संख्या-रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण

- एक सीधी रेखा खींचिए ।

लगभग बीच में बिन्दु O लेकर इसके दोनों ओर परस्पर समान दूरी पर बहुत से बिन्दु अंकित कीजिए ।

O द्वारा शून्य निरूपित करके इसके दायीं ओर के क्रमागत बिन्दुओं को क्रमशः +1, +2, +3, ... अंकित कीजिए । इसके विपरीत O से बायीं ओर के क्रमागत बिन्दुओं को क्रमशः -1, -2, -3 ... अंकित कीजिए ।

इस प्रकार सभी पूर्णांक संख्या-रेखा पर निरूपित हैं । यथा,



विपरीत संख्याओं का संयोग :

- खेल के मैदान में एक रेखा पूरब-पश्चिम दिशा में रस्सी और चूने की सहायता से खींचिए । लगभग मध्य में स्थित एक बिन्दु से दोनों ओर फीते की सहायता से, 1-1 (एक-एक) मीटर की दूरी पर चूने से बहुत से बिन्दु चिह्नित कीजिए। लगभग मध्य में अंकित बिन्दु को शून्य निरूपित करके अन्य बिन्दुओं द्वारा पूर्णांकों को निरूपित कीजिए।

शून्य से 5 मीटर पूरब जाकर +5 पर पहुँचिए। + 5 से 5 मीटर पश्चिम जाकर हम कहाँ पहुँचते हैं ?

शून्य से 5 मीटर पूरब की ओर का विस्थापन = +5

5 मीटर पश्चिम की ओर का विस्थापन = -5

इस प्रकार + 5 और -5 के दोनों विस्थापनों का संयुक्त परिणाम क्या है ?

$(+5) + (-5) = 0$

इसी प्रकार शून्य से 5 मीटर पश्चिम की ओर जाकर -5 विस्थापन प्राप्त करें, पुनः वहाँ से 5 मीटर पूरब की ओर आकर +5 विस्थापन प्राप्त करें ।

दोनों विस्थापनों का संयुक्त परिणाम क्या है ?

$(-5) + (+5) = 0$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

+5 और -5 परस्पर विपरीत ऐसे पूर्णांक हैं कि

$(+5) + (-5) = 0$

इसी प्रकार -7 और +7 परस्पर विपरीत पूर्णांक हैं ।

प्रयास कीजिए :

1. निम्नांकित पूर्णांकों के विपरीत पूर्णांक बताइए :
   -6, +9, -11, +12, -17
2. मान बताइए :
   (-11) + (+11), (+9) + (-9), (+13) + (-13)

निष्कर्ष :

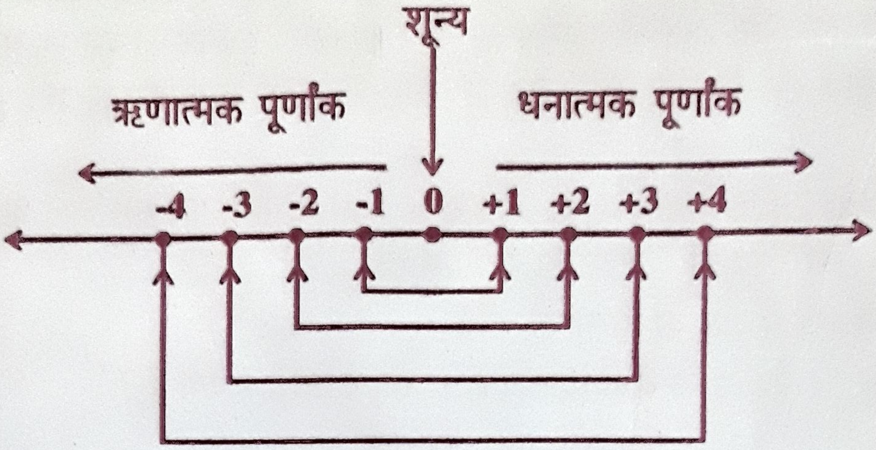
प्रत्येक धन पूर्णांक के संगत एक ऋण पूर्णांक होता है और इन दोनों का योगफल 'शून्य' होता है।

हम देखते हैं कि संख्या-रेखा पर,

(i) धन पूर्णांक शून्य के दाहिनी ओर हैं।

(ii) ऋण पूर्णांक शून्य के बायीं ओर हैं।

संख्या रेखा पर विपरीत पूर्णांकों के जोड़े (युग्म) :



आइए जानें

प्रत्येक धन पूर्णांक की संगतता एक ऐसे ऋण पूर्णांक से है, जिसकी शून्य से वही दूरी है जो धन पूर्णांक की शून्य से है, किन्तु विपरीत दिशाओं में है।

हम धन और ऋण पूर्णांकों के ऐसे जोड़े बना सकते हैं जो परस्पर विपरीत हैं । अतः हम इन जोड़ों को विपरीत दिशाओं में मापन हेतु प्रयोग कर सकते हैं । उदाहरणतः यदि - 40, चालीस रुपये की हानि को व्यक्त करता है, तो + 40, चालीस रुपये के लाभ का परिचायक है ।

> **पूर्णांक ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... हैं ।**
> **संख्याएँ +1, +2, +3, ... धन पूर्णांक हैं ।**
> **संख्याएँ -1, -2, -3, ... ऋण पूर्णांक हैं ।**
> **शून्य सहित सभी धन और ऋण पूर्णांक, पूर्णांक हैं ।**

योगात्मक प्रतिलोम :

यदि दो पूर्णांकों a तथा b का योग शून्य हो तो a और b को परस्पर योगात्मक प्रतिलोम कहते हैं।

चूँकि $(+a)+(-a)=0$

अतः किसी पूर्णांक a के संगत विपरीत चिह्न वाले पूर्णांक (–a) को उसका योगात्मक प्रतिलोम कहते हैं।

जैसे : चूँकि $(+6)+(-6)=0$

अतः + 6 और – 6 परस्पर योगात्मक प्रतिलोम हैं।

इसे भी जानें :

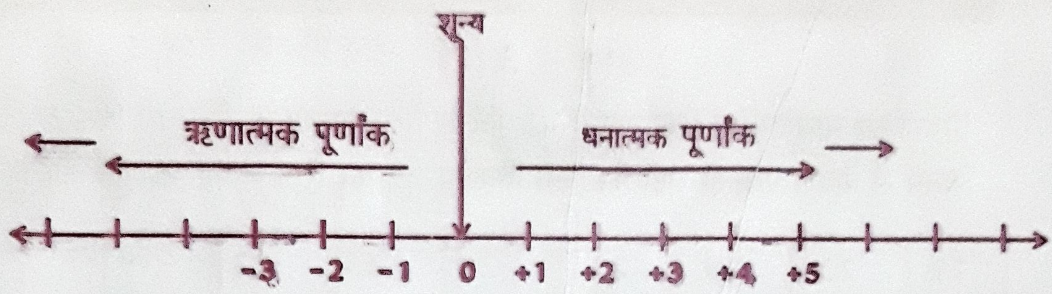
> **चूँकि 0 + 0 = 0**
> **अतः शून्य का योगात्मक प्रतिलोम स्वयं शून्य ही हैं।**

पूर्णांकों की तुलना :

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

शून्य से 5^0 सेल्सियस ऊपर के तापमान तथा 5^0 सेल्सियस नीचे के तापमान में कौन अधिक है ?

+5 और -5 पूर्णांकों में कौन बड़ा है ?



पूर्ण संख्याओं में हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं में से संख्या रेखा पर दाहिनी ओर स्थित संख्या अपने बायीं ओर स्थित संख्याओं से बड़ी होती है । जैसे $8 > 6$ जिसके समानार्थी $6 < 8$ यानी संख्या रेखा पर 8 दाहिने तथा 6 उसके बाएं हैं ।

यही नियम यथावत् पूर्णांकों की तुलना में भी प्रयुक्त होता है । अतः दो पूर्णांकों में जो संख्या रेखा पर दाहिने होती है वह अपने बायें के पूर्णांक से बड़ी होती है ।

स्मरण रखिए :

1. प्रत्येक धन पूर्णांक समस्त ऋण पूर्णांकों से बड़ा होता है ।
2. शून्य प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा होता है ।
3. शून्य प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है ।
4. बड़े पूर्णांक का योगात्मक प्रतिलोम छोटे पूर्णांक के योगात्मक प्रतिलोम से छोटा होता है जैसे $5 > 3 \Rightarrow -5 < -3$

3.4. पूर्णांकों का निरपेक्ष मान (Absolute value)

संख्या रेखा खींचिए, इस पर पूर्णांकों को प्रदर्शित कीजिए । देखकर बताइए कि

- +6 शून्य से कितनी दूरी पर है ?
- - 6 की शून्य से दूरी कितनी है ?

उपर्युक्त दूरियों में क्या सम्बन्ध है ?

दोनों दूरियों का परिमाण 6 है, इस प्रकार, 6 को हम +6 और -6 का निरपेक्ष मान या परिमाण कहेंगे।

-6 के निरपेक्ष मान को $|-6|$ और +6 के निरपेक्ष मान को भी $|+6|$ लिखते हैं । इस प्रकार

$|-6| = 6 = |+6|$ $\quad$ $|-8| = 8 = |+8|$

$|-9| = 9 = |+9|$ $\quad$ $|0| = 0$

प्रयास कीजिए :

खाली जगह भरिए :

|+11| = ☐ , |−13| = ☐

|−47| = ☐ , |12| = ☐

अभ्यास 3 (a)

निम्नांकित सारणियों में रिक्त स्थानों की पूर्ति के लिए सारणी के नीचे चार विकल्प दिये गये हैं। जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प चुन कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1.

19	23	25	29	-29	-25	-23	-19
7	11	13	17	-17		-11	-7

(i) -25 (ii) -13 (iii) 13 (iv) -10

2.

-7	25	7	-25	-13	31	13	-31
5	-8	-5	8	11	-14	-11	

(i) -13 (ii) 17 (iii) 14 (iv) -17

3. निम्नलिखित को पूर्णांक के रूप में लिखिए । पूरब को धन दिशा तथा समुद्र तल से ऊँचाई को धन दिशा मानिए।

(i) शून्य से नीचे 4^0 सेल्सियस का तापमान

(ii) 7 कदम पूरब

(iii) ₹ 3.28 की हानि

(iv) 18 मी पश्चिम का विस्थापन

(v) समुद्र तल से 1,000 मीटर ऊँचाई

4. निम्नलिखित पूर्णांकों के योगात्मक प्रतिलोम लिखिए :

(i) +9 (ii) −21 (iii) +39

(iv) −41 (v) +91

5. संख्या-रेखा खींचिए । उस पर निम्नांकित पूर्णांकों को प्रदर्शित कीजिए :

(क) +4 (ख) -9 (ग) +7

(घ) -3 (ङ) -6

6. पूर्णांकों को ऊर्ध्वाधर संख्या रेखा पर भी दिखा सकते हैं जिसपर ऊपर की दिशा को धनात्मक तथा नीचे की दिशा को ऋणात्मक माना जाता है । पार्श्वांकित संख्या रेखा देखिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(क) A बिन्दु +7 है । कौन सा बिन्दु -7 है ?

(ख) बिन्दु B किस पूर्णांक को निरूपित करता है?

(ग) बिन्दु B का विपरीत बिन्दु बताइए ।

(घ) बिन्दु D, K और L से निरूपित पूर्णांक लिखिए ।

(ङ) बिन्दुओं D, K और L के विपरीतों को बताइए ।

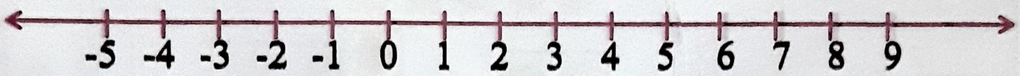
7. निम्नांकित के बीच के सभी पूर्णांक लिखिए ।

(क) -2 और +3 (ख) 0 और 6

(ग) -4 और 4 (घ) -5 और +2

(ङ) -3 और +5 (च) -8 और 4

8. निम्नांकित संख्या-रेखा देखिए



इसकी सहायता से निम्नांकित पूर्णांकों के जोड़े के बीच के पूर्णांकों को आरोही (बढ़ते हुए) क्रम में लिखिए :

(क) 2, 5 (ख) -4, 0 (ग) 3, 8 (घ) 0, 4

(ङ) -5, -2 (च) -1, 4

9. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(क) |–13| (ख) |12| (ग) |–37|

(घ) |0| (ङ) |–47| (च) |101|

10. अपनी अभ्यास पुस्तिका में सत्य या असत्य कथन की पहचान कर लिखिए :

(क) सबसे छोटा पूर्णांक शून्य है ।

(ख) शून्य का विपरीत नहीं होता है।

(ग) $-17 > -5$

(घ) एक धनात्मक पूर्णांक अपने योगात्मक प्रतिलोम से बड़ा होता है ।

(ङ) एक ऋणात्मक पूर्णांक अपने योगात्मक प्रतिलोम से बड़ा होता है ।

(च) शून्य एक पूर्णांक नहीं है ।

(छ) शून्य का योगात्मक प्रतिलोम शून्य है।

3.5. पूर्णांकों पर संक्रियाएँ ;

- दो विभिन्न रंगों जैसे लाल और काले रंगों की दफ्ती की वृत्ताकार बहुत सी चकतियाँ काटिए । लाल चकतियों से धन पूर्णांक और काली चकतियों से ऋण पूर्णांक समझिए । इस प्रकार लाल रंग की एक चकती से +1 और काले रंग की एक चकती से -1 का बोध होगा । एक लाल '🔴' और एक काले रंग की '⚫' चकती को युग्मित करके एक शून्य युग्म के रूप में समझ सकते हैं। अतः [🔴/⚫] युग्म शून्य है।

निम्नांकित चित्र में कुछ पूर्णांकों को रंगीन चकतियों द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

पूर्णांक	रंगीन चकतियों द्वारा निरूपण
4	🔴🔴🔴🔴
-3	⚫⚫⚫
5	🔴🔴🔴🔴🔴
शून्य (0)	[🔴⚫] या [🔴/⚫]

3.5.1 पूर्णांकों का योग ;

(a) रंगीन चकतियों की सहायता से समान चिह्नों के पूर्णांकों को जोड़ना :

निम्नांकित सारणी को देखिए :

(+2) + (+3)	🔴🔴 + 🔴🔴🔴 = 🔴🔴🔴🔴🔴	**(+2) + (+3) = + 5**
(–3) + (–1)	⚫⚫⚫ + ⚫ = ⚫⚫⚫⚫	**(–3) + (–1) = – 4**
(–4) + (–2)	⚫⚫⚫⚫ + ⚫⚫ = ⚫⚫⚫⚫⚫⚫	**(–4) + (–2) = – 6**
(+3) + (+5)	🔴🔴🔴 + 🔴🔴🔴🔴🔴 = 🔴🔴🔴🔴🔴🔴🔴🔴	**(+3) + (+5) = + 8**

हम देखते हैं कि दो धन पूर्णांकों का योगफल धन पूर्णांक और दो ऋण पूर्णांकों का योगफल ऋण पूर्णांक होता है ।

प्रयास कीजिए :

1. चकतियों की सहायता से निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) (–4) + (–5) (ii) (+6) + (+4)

(iii) (–11) + (–7) (iv) (–2) + (–1)

(v) (+4) + (+2) (vi) (–3) + (–3)

2. मान बताइए।

(i) (–2) + (–1) (ii) (–3) + 0

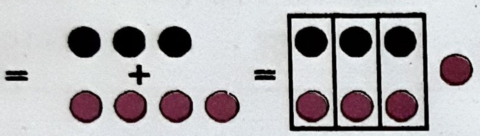
(iii) (+4) + (+5) (iv) (–5) + (–6)

(v) (–5) + (–2) (vi) (+6) + (+3)

(b) आइए रंगीन चकतियों की सहायता से असमान चिह्नों के दो पूर्णांकों को जोड़ना सीखें

इन्हें देखकर समझिए :

(i) (–3) + (+ 4) = काले रंग की तीन चकतियाँ + लाल रंग की चार चकतियाँ



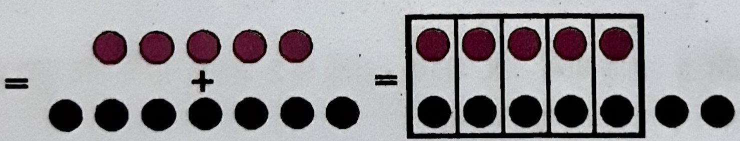
तीन काली तथा तीन लाल चकतियों को युग्मित करने पर एक लाल रंग की चकती बचती है।

(–3) + (+4) = [(–3) + (+3)] + (+1)

= 0 + (+1)

= (+1)

(ii) (+5) + (–7) = लाल रंग की 5 चकतियाँ + काले रंग की 7 चकतियाँ



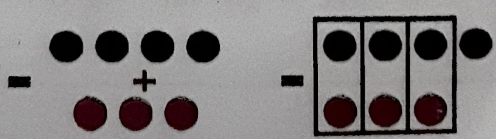
दो काले रंग की चकतियाँ बचती हैं।

= [(+5) + (–5)] + (–2)

= 0 + (–2)

= (–2)

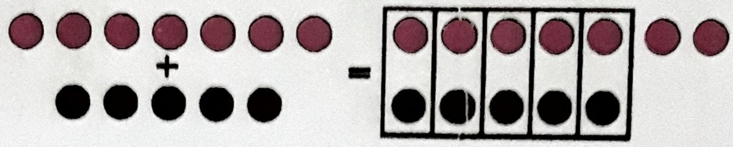
(iii) (–4) + (+3) = चार काली चकतियाँ + तीन लाल चकतियाँ



$= \boxed{(-3) + (+3)} + (-1)$

$= -1$

(iv) $(+7) + (-5)$ =



$= \boxed{(+5) + (-5)} + (+2)$

$= 0 + (+2)$

$= (+2)$

प्रयास कीजिए :

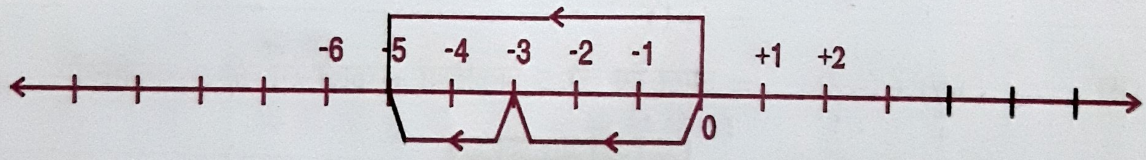
- **मान बताइए**

(क) $(-12) + (+8)$	(ख) $(+7) + (-5)$	(ग) $(-12) + (+9)$
(घ) $(-27) + (+18)$	(ङ) $(+15) + (+13)$	(च) $(+31) + (-18)$
(छ) $(-19) + (+16)$	(ज) $(-8) + (+12)$	(झ) $(-16) + (+19)$

(c) संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों को जोड़ना :

उदाहरण 1. संख्या रेखा की सहायता से (-3) + (-2) का मान बताइए ।

हल :



शून्य से आरम्भ करके -3 अर्थात् 3 इकाई बायीं ओर जाइए । वहाँ से 2 इकाई बायीं ओर पुनः जाइए। कहाँ पहुँचते हैं ? हम -5 पर पहुँचते हैं । अतः (-3) + (-2) = -5

उदाहरण 2. (+6) + (+3) का मान बताइए ।

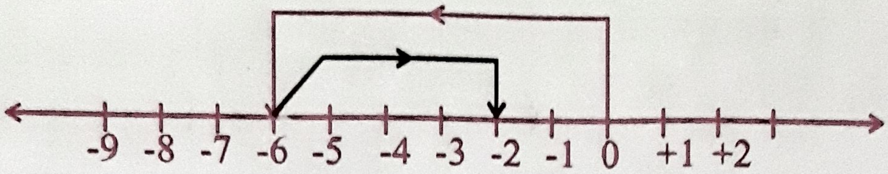
हल : हम पूर्ण संख्याओं के योगफल ज्ञात करने में देख चुके हैं कि (+6) + (+3) = +9

उपर्युक्त उदाहरणों से दो समान चिह्नों वाले पूर्णांकों के जोड़ने का नियम निम्नांकित प्राप्त होता है।

> **समान चिह्नों के दो पूर्णांकों के योगफल के लिए जोड़ी जाने वाली संख्याओं के निरपेक्ष मानों के योगफल के पूर्व वही चिह्न लगाते हैं, जो जोड़े जाने वाले पूर्णांकों का है ।**

(d) संख्या रेखा की सहायता से असमान चिह्नों के पूर्णांकों को जोड़ना

उदाहरण 3. (-6) + (+4) का मान बताइए :



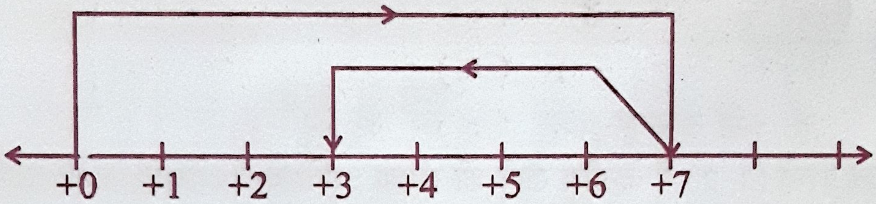
-6 विस्थापन हेतु 6 इकाई शून्य से बायें जाइए । पुनः वहाँ से +4 विस्थापन हेतु 4 इकाई दाहिने जाइए। कहाँ पहुँचते हैं ? शून्य से 2 इकाई बायें अर्थात् -2 पर पहुँचते हैं ।

इस प्रकार

(-6) + (+4) = -2

उदाहरण 4. (+7) + (-4) का मान बताइए ।

हल :



शून्य से +7 विस्थापन हेतु 7 इकाई दाहिने जाइए । पुनः +7 में (-4) जोड़ने के लिए वहाँ से 4 इकाई बायें जाइए ।

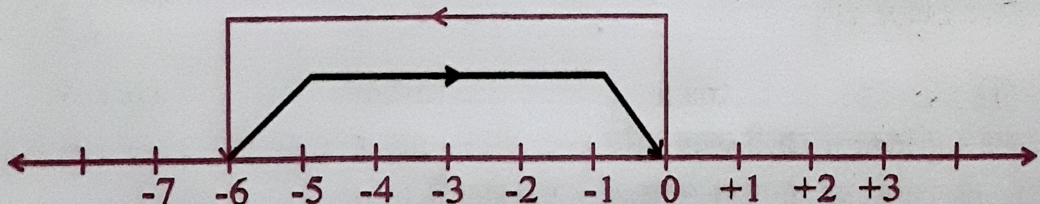
कहाँ पहुँचते हैं ?

शून्य से 3 इकाई दाहिने अर्थात् +3 पर पहुँचते हैं ।

इस प्रकार (+7) + (-4) = +3

उदाहरण 5. (-6) + (+6) का मान बताइए ।

हल :



-6 विस्थापन के लिए शून्य से 6 इकाई बायें जाइए । इसमें +6 जोड़ने के लिए वहाँ से 6 इकाई दाहिने जाइए।

कहाँ पहुँचते हैं ?

शून्य पर वापस आ जाते हैं ।

(-6) + (+6) = 0

हम देखते हैं कि

1. दो धन पूर्णांकों का योगफल धन होता है ।
2. दो ऋण पूर्णांकों का योगफल ऋण होता है ।
3. विपरीत चिह्नों वाले दो पूर्णांकों का योगफल पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों का अन्तर होता है तथा चिह्न, वही होता है जो परिमाण में बड़ी संख्या का होता है (अन्तर 0 होने पर कोई चिह्न नहीं होता है)

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित का मान संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए

क. -5 + 7

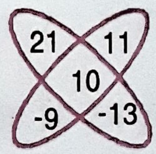
ख. 5 + (-9)

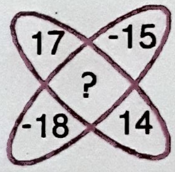
ग. (-2) + (-6)

अभ्यास 3(b)

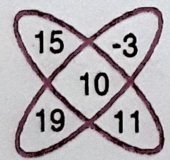
1. निम्नांकित प्रश्नों (1-2) में केन्द्रीय खाने की संख्या उसके चारों ओर के पटलों पर अंकित संख्याओं से किसी प्रकार संबंधित है। प्रश्नचिह्न (?) वाली संख्या ज्ञात कीजिए :

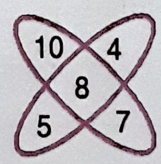
(क)

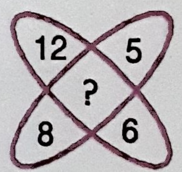
(ख) 

(ग) 

(i) -2 (ii) 2 (iii) 3 (iv) -3

2. (क) 

(ख) 

(ग) 

(i) -5 (ii) 5 (iii) 6 (iv) -6

3. अपनी अभ्यास पुस्तिका में खाली जगह भरिए :
   (क) दो पूर्णांकों का योगफल सदैव .... होता है ।
   (ख) दो धन पूर्णांकों का योगफल .... होता है।
   (ग) दो ऋण पूर्णांकों का योगफल .... होता है।

4. सत्य अथवा असत्य बताइए ।
   (क) किसी पूर्णांक तथा इसके योगात्मक प्रतिलोम का योगफल शून्य होता है ।
   (ख) शून्य ऋण पूर्णांक है।
   (ग) दो ऋण पूर्णांकों का योगफल धन पूर्णांक होता है ।

(घ) किसी पूर्णांक और शून्य का योगफल उस पूर्णांक के बराबर होता है ।

(च) एक ऋण और एक धन पूर्णांक का योगफल सदैव धन पूर्णांक होता है ।

(छ) संख्या रेखा पर -18 और +18, शून्य से समान दूरी पर हैं ।

(ज) दो धन पूर्णांकों का योगफल सदैव धन पूर्णांक होता है ।

3.5.2 पूर्णांकों पर योग-संक्रिया के प्रगुण :

1. निम्नलिखित तालिका के खाली स्थानों को भरिए :

किन्हीं दो पूर्णांकों का योग	योगफल का मान	योगफल पूर्णांक है अथवा नहीं
(-4) + (+6)	+2	पूर्णांक है ।
(+9) + (-8)		पूर्णांक है ।
(-12) + (+7)		
(+14) + (+3)		

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि **दो पूर्णांकों का योगफल सदैव पूर्णांक होता है ।**

अतः पूर्णांकों में **योग-संक्रिया संवरक** है ।

2. कोई दो पूर्णांक -7 तथा +4 लें ।

(-7) + (+4) = -3 और (+4) + (-7) = -3

इसी प्रकार पूर्णांकों के अन्य जोड़े यथा -6 और 0, तथा +8 और -11 लें।

यहाँ -6 + 0 = -6 और 0 + (-6) = -6

तथा (+8) + (-11) = -3 और (-11) + (+8) = -3

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

किसी भी क्रम में दो पूर्णांकों का योगफल सदैव समान होता है

पूर्णांकों में योग संक्रिया क्रम विनिमेय है ।

3. कोई तीन पूर्णांक यथा +5, -3 और -4 लें ।

$$\{(+5)+(-3)\}+(-4)=(+2)+(-4)=-2$$

पुनः $$(+5)+\{(-3)+(-4)\}=(+5)+(-7)=-2$$

इस प्रकार $$\{(+5)+(-3)\}+(-4)=(+5)+\{(-3)+(-4)\}$$

उपर्युक्त प्रकार से पूर्णांकों (-5), (+4) तथा (+6) और (-8), (-3) तथा (+9) के लिये परिणामों की तुलना करके निष्कर्ष निकालिए कि

तीन पूर्णांकों को क्रम में जोड़ते समय योग संक्रिया बाएँ से शुरू करें या दाएँ से शुरू करें, पूर्णांकों का योगफल समान प्राप्त होता है।

पूर्णांकों पर योग-संक्रिया साहचर्य नियम का पालन करती है ।

4. देखिए,

$(-4) + 0 = -4, (+7) + 0 = +7$

$(-11) + 0 = -11, 0 + (-5) = -5$

इस प्रकार

प्रत्येक पूर्णांक का 0 के साथ योगफल उसी पूर्णांक के समान होता है । इसी कारण शून्य योग-संक्रिया का तत्समक अवयव (Identity Element) है ।

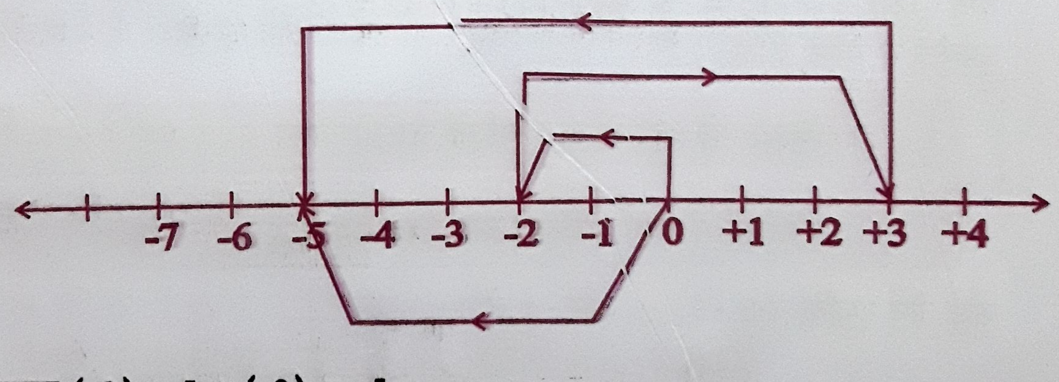
5. पूर्ण संख्याओं में हम जानते हैं कि प्रत्येक पूर्ण संख्या में 1 जोड़ने पर उसका अनुवर्ती प्राप्त होता है। परन्तु शून्य किसी पूर्ण संख्या का अनुवर्ती नहीं है । पूर्णांकों में भी इसी प्रकार प्रत्येक पूर्णांक में 1 जोड़कर उसका अनुवर्ती प्राप्त करते हैं । उदाहरणत (-5) + 1 = -4, इसलिये -4 पूर्णांक -5 का अनुवर्ती है । चूंकि (-1) + 1 = 0, इस प्रकार पूर्णांक -1 का अनुवर्ती 0 है । उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

प्रत्येक पूर्णांक का अनुवर्ती होता है, यह उस पूर्णांक में 1 जोड़कर प्राप्त होता है।

इसी प्रगुण के आधार पर हम निष्कर्ष निकालते हैं कि सबसे बड़े पूर्णांक का अस्तित्व नहीं है। सबसे छोटा पूर्णांक भी नहीं होता है। बताए क्यों ?

उदाहरण 6. संख्या रेखा खींचिए । इस पर (-2) + 5 + (-8) का योग प्रदर्शित कीजिए।

हल :



इस प्रकार (-2) + 5 + (-8) = -5

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित का मान संख्या-रेखा पर प्रदर्शित कीजिए ।

(क) (-5) +7 (ख) 5 + (-9) (ग) (-2) + (-6)

(घ) -1 + (-2) +2 (ङ) (-2) + (-3) + (+7)

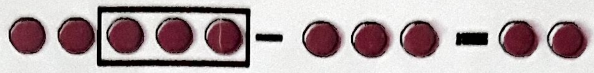
3.5.3 पूर्णांकों का घटाना :

(i) इन्हें कीजिए :

(+5) - (+3) का मान रंगीन चकतियों की सहायता से ज्ञात कीजिए ।

(+5) = 5 लाल रंग की चकतियाँ

(+3) = 3 लाल रंग की चकतियाँ

∴ (+5) − (+3) = 

= +2

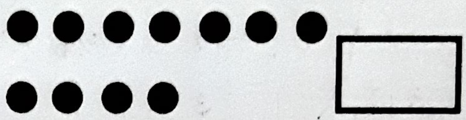
इस प्रकार (+5) − (+3) = +2

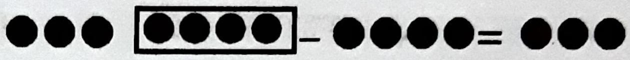
मान बताइए (+5) + (-3) = ☐

(ii) (-7) - (-4) का मान ज्ञात कीजिए

(-7) = 7 काले रंग की चकतियाँ

(-4) = 4 काले रंग की चकतियाँ



∴ (-7) - (-4) 

= (−7) − (−4) = −3

इस प्रकार (−7) − (−4) = −3

ज्ञात कीजिए (−7) + (+ 4) = ☐

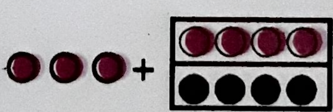
(iii) (+3) − (−4) का मान ज्ञात कीजिए ।

(+3) = लाल रंग की तीन चकतियाँ

(-4) = काले रंग की चार चकतियाँ

(+3) - (-4) का मान ज्ञात करने के लिए लाल रंग की तीन चकतियों में से काले रंग की चार चकतियाँ निकालनी हैं ।

+3 = तीन लाल चकतियाँ =

=  = 3+ (+4 − 4)

= 3 + चार शून्य युग्म

−4 = निकाली गयी चार काली चकतियाँ =

∴ (+3) − (−4) = बची चकतियाँ

=

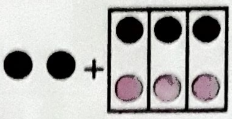
= सात लाल चकतियाँ

= + 7

इस प्रकार $(+3) - (-4) = +7$

यहाँ भी $(+3) + (+4) = +7$

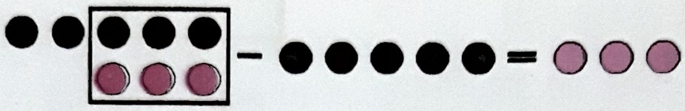
(iv) $(-2) - (-5)$ का मान ज्ञात कीजिये ।

(-2) = काले रंग की दो चकतियाँ =  $= -2 +$ $\boxed{(-3) + 3}$

(-5) = काले रंग की पाँच चकतियाँ =

$(-2) - (-5)$ = काले रंग की दो चकतियों से काले रंग की पाँच चकतियाँ घटानी हैं ।

इस प्रकार

$(-2) - (-5) =$ 

अतः $(-2) - (-5) = +3$

यहाँ $(-2) + (+5) = +3$

> **इस प्रकार किसी पूर्णांक से दूसरे पूर्णांक को घटाने को पहले पूर्णांक में दूसरे के योगात्मक प्रतिलोम के योग द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।**

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित प्रश्नों में मान ज्ञात कीजिए :

1. समान चिह्नों के पूर्णांक :

$(+4) - (+2)$ $(-5) - (-3)$ $(+6) - (+3)$

$(+6) - (+4)$ $(+5) - (+4)$ $(+3) - (+5)$

$(-4) - (-6)$ $(+2) - (+3)$ $(-3) - (-4)$

$(+5) - (+6)$

2. असमान चिह्नों के पूर्णांक :

$(-5) - (+3)$ $(+4) - (-2)$ $(-3) - (+2)$ $(+3) - (-3)$

$(-4) - (+3)$ $(+5) - (-3)$ $(-6) - (+2)$

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त विधि से निम्नांकित के मान बताए ।

(क) $(+3) - (+4)$ **(ख)** $(-3) - (-2)$ **(ग)** $(-5) - (+4)$

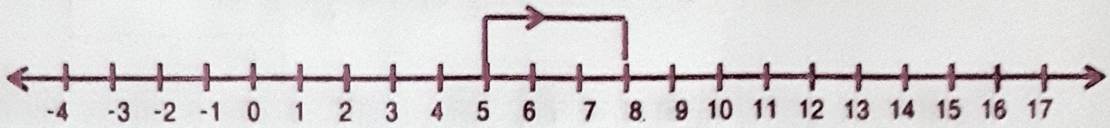
(घ) $(+7) - (+3)$ **(च)** $(+4) - (+6)$ **(छ)** $(-5) - (-3)$

संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का घटाना :

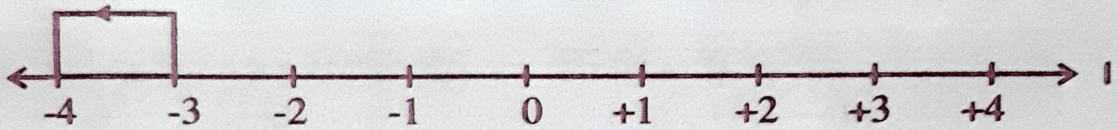
हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं में संख्या रेखा पर 8 - 5 का अर्थ है कि 5 से हम कितना और किस दिशा में चलें कि 8 पर पहुंच जायें। इसी प्रकार पूर्णांकों में (+8) - (+5) का अर्थ है कि संख्या रेखा पर +5 से कितना और किस दिशा में चलें कि +8 पर पहुँच जायें। चूँकि हम +5 से 3 इकाई दायीं ओर चल कर + 8 तक पहुँचते हैं, अतः

$$(+8) - (+5) = 3$$

इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं



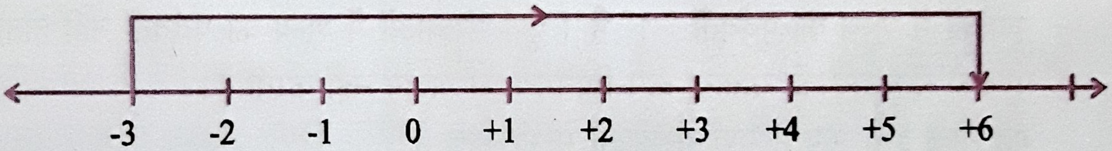
इसी प्रकार (-4) - (-3) का अर्थ है कि संख्या रेखा पर (-3) से कितना और किस दिशा में चले कि -4 पर पहुँच जायें ।



अतः (-4) - (-3) = -1

(i) संख्या रेखा की सहायता से (+6) - (-3) का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

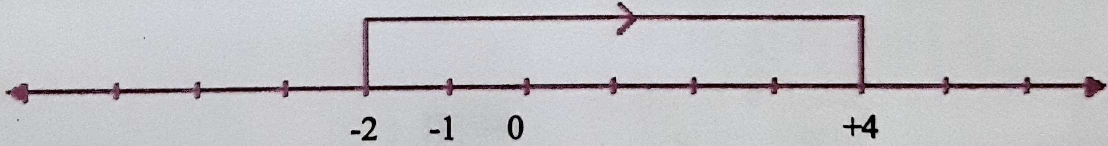


-3 से +6 तक विस्थापित होने के लिए 9 इकाई दाहिने जाना पड़ता है ।

$\therefore$ $(+6) - (-3) = +9$

(ii) $(+4) - (-2)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

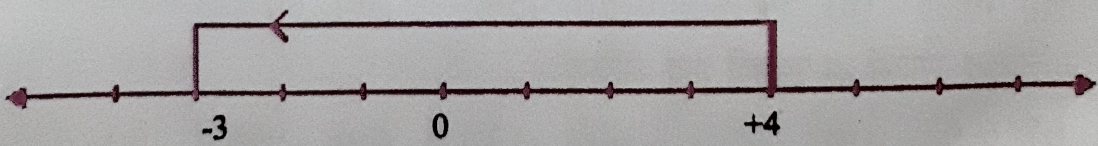


-2 से +4 तक विस्थापित होने के लिए 6 इकाई दाहिने जाना पड़ता है ।

अतः (+4) - (-2) = +6

(iii) $(-3) - (+4)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :



चूँकि +4 से -3 तक पहुँचने के लिए 7 इकाई बायें जाना पड़ता है ।

अतः (-3) - (+4) = - 7

प्रयास कीजिए :

> उपर्युक्त विधि से निम्नलिखित का मान बताइए ।
>
> (क) $(-2)-(-3)$ (ख) $(+5)-(+3)$ (ग) $(-4)-(-2)$

घटाने की संक्रिया के प्रगुण :

1. दो पूर्णांक जैसे -6 और 7 लें ।

$(-6) - 7 = (-6) - (+7)$

$= (-6) + (-7) = -13$ जो एक पूर्णांक है।

इसी प्रकार पूर्णांकों के अन्य दो जोड़े जैसे -8 और -3 तथा 6 और 4 लीजिए ।

$(-8)-(-3)=(-8)+(+3)=-5$ जो एक पूर्णांक है ।

पुनः $6-4=6-(+4)=6+(-4)=2$ भी एक पूर्णांक है ।

इस प्रकार हम देखते हैं कि

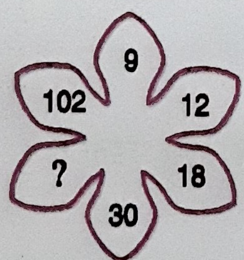
> **यदि दो पूर्णांक लें तो किसी एक को दूसरे से घटाने पर पूर्णांक प्राप्त होता है।**

अतः पूर्णांकों में घटाना संवरक है। जबकि आप पहले देख चुके हैं कि यह प्रगुण पूर्ण संख्याओं में सत्य नहीं है ।

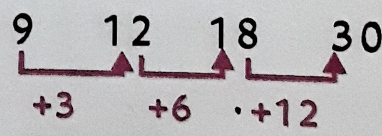
2. पूर्णांकों में शून्य का पूर्ववर्ती '-1' है । पूर्ण संख्याओं में शून्य का पूर्ववर्ती नहीं होता है ।
3. पूर्णांकों में घटाने की संक्रिया क्रम-विनिमेय का पालन नहीं करती है।
   यह ठीक इसी रूप में पूर्ण संख्याओं में भी सत्य है ।
4. किसी पूर्णांक से शून्य घटाने पर परिणाम वही पूर्णांक होता है । जैसे $(-6) - 0 = -6$

अभ्यास 3(c)

1. प्रश्न वाचक चिह्न ? के स्थान पर कौन-सी संख्या होगी।



संकेत :



(i) 40 (ii) 54 (iii) 45 (iv) 60

2. निम्नलिखित पूर्णांकों का पूर्ववर्ती ज्ञात कीजिए :

(i) 6 (ii) -4 (iii) -19 (iv) -996 (v) 0

3. अपनी अभ्यास पुस्तिका में खाली स्थान ☐ में > अथवा < भरिये :

(क) $(-3)+(-6)$ ☐ $(-3)-(-6)$

(ख) $(-21)-(-21)$ ☐ $(-21)+(-21)$

(ग) $(-27)-(+27)$ ☐ $27-(+45)$

4. खाली जगह भरिये :

13	11	9	7
67	?	27	7

(i) 57 (ii) 62 (iii) 47 (iv) 52

5. निम्नलिखित पूर्णांकों का उत्तरवर्ती ज्ञात कीजिए :

(i) 7 (ii) –5 (iii) –20 (iv) –997 (v) 0

6. किसी स्थान पर 12 बजे दोपहर तापमान शून्य से 19^0 सेल्सियस अधिक था तथा अर्द्धरात्रि को तापमान 0^0 से 2^0 सेल्सियस कम हो गया । तापमान में परिवर्तन ज्ञात कीजिए ।

7. प्लेटो का जन्म 429 ईसा पूर्व में हुआ था तथा 348 ईसा पूर्व में दिवंगत हुये । वे कितने वर्षों तक जीवित रहे ?

8. समुद्र तल से अधिकतम गहराई वाला बिन्दु 11600 मीटर नीचे है । अधिकतम ऊँचाई की पर्वत चोटी समुद्र तल से 8846 मीटर ऊँची है । गहराई वाले बिन्दु से चोटी की ऊँचाई बताइए ।

3.5.4 पूर्णांकों पर गुणन संक्रिया :

हम जानते हैं कि गुणन संक्रिया बार-बार जोड़ने की क्रिया है ।

इस प्रकार

$$4 \times (-5) = (-5)+(-5)+(-5)+(-5)$$
$$= -20$$
$$= -(4 \times 5)$$
$$3 \times (-6) = (-6)+(-6)+(-6)$$
$$= -18$$
$$= -(3 \times 6)$$

अब हम गुणनफल $(-3) \times 4$ पर विचार करते हैं ।

देखिए, $(-3) \times 4 = 4 \times (-3)$ [गुणन संक्रिया का क्रम-विनिमेय नियम]

$= (-3)+(-3)+(-3)+(-3)$

$= -12$

$= -(3 \times 4)$

इसी प्रकार $-2 \times 5 = 5 \times (-2) = -10$

$-8 \times 4 = 4 \times (-8) = -32$

और $-5 \times 7 = 7 \times (-5) = -35$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक होता है ।

प्रयास कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका में निम्नांकित गुणनफलों का मान रिक्त स्थानों में भरिए ।

$5 \times (-4) =$ ☐ $(-3) \times 6 =$ ☐

$7 \times (-3) =$ ☐ $(-4) \times 6 =$ ☐

निष्कर्ष :

एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल ज्ञात करने के लिए दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के गुणनफल के पूर्व ऋण चिह्न लगाते हैं।

ध्यान दीजिए :

यदि दो पूर्णांक धनात्मक हैं, तो वे पूर्ण संख्याएं ही हैं और उनका गुणनफल भी पूर्ण संख्याओं के गुणनफल की भाँति ज्ञात करते हैं । यथा

$(+7) \times (+4) = +28 = 7 \times 4$

$(+8) \times (+3) = +24 = 8 \times 3$

दो ऋणपूर्णांकों का गुणनफल :

यदि दो पूर्णांक -3 और -4 हैं, तो (-3) × (-4) का मान ज्ञात करने के लिये निम्नांकित पैटर्न देखिए:

$4 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -16$

$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$

$2 \times (-4) = (-4) + (-4) = -8$

$1 \times (-4) = (-4) = -4$

$0 \times (-4) = 0 = 0$

$-1 \times (-4) = ?$

ऊपर से आरम्भ करके गुणनफल के मान क्रमशः -16, -12,-8, -4, 0 हैं । इस प्रकार गुणनफल सतत +4 से बढ़ रहे हैं ।

उपर्युक्त नियमानुसार

$(-1) \times (-4) = 0 + 4 = 4$

$(-2) \times (-4) = 4 + 4 = 8$

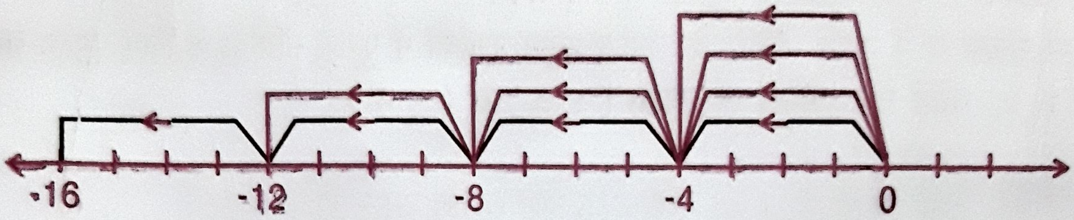
$(-3) \times (-4) = 8 + 4 = 12$

अतः $(-3) \times (-4) = 12$

✌ **निष्कर्ष :**

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

संख्या रेखा की सहायता से गुणन संक्रिया :



$4 \times (-4) = -4$ के बराबर 4 बार विस्थापन

अतः $4 \times (-4) = -16$

$3 \times (-4) = -4$ के बराबर 3 बार विस्थापन

अतः $3 \times (-4) = -12$

$2 \times (-4) = -4$ के बराबर 2 बार विस्थापन

इसलिए $2 \times (-4) = -8$

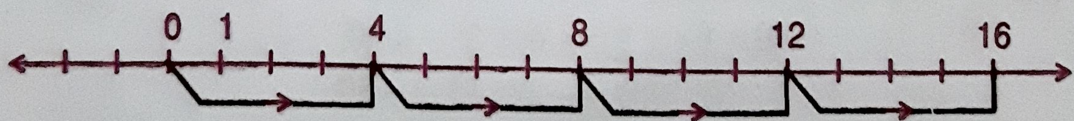
$1 \times (-4) = -4$ के बराबर 1 बार विस्थापन

इसलिए $1 \times (-4) = -4$

$0 \times (-4) = 0$ क्यों ?

इसलिए $(-1) \times (-4) = +4$ के बराबर 1 बार विस्थापन

$= +4$



$(-2) \times (-4) = +4$ के बराबर 2 बार विस्थापन

$(-2) \times (-4) = +8$

इसी प्रकार

$\therefore (-3) \times (-4) = +12$

$(-4) \times (-4) = +16$

निष्कर्ष :

दो धनात्मक अथवा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है ।

प्रयास कीजिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका में खाली जगह भरिए

$(+3)\times(+6)$	$(-2)\times(-4)$	$(-4)\times(-5)$	$(-10)\times(-1)$
18			

गुणन संक्रिया के प्रगुण :

पूर्ण संख्याओं में गुणन संक्रिया के समस्त प्रगुण पूर्णांकों में गुणन संक्रिया के लिए पूर्णतः सत्य हैं ।

(1) कोई दो पूर्णांक लें, यथा (+ 3) व (- 4)

$(+3)\times(-4) = -12$

इसी प्रकार $(-2)\times(-8) = 16$ तथा $(-5)\times(+3) = -15$

यहाँ प्राप्त गुणनफल −12, 16 तथा − 15 प्रत्येक पूर्णांक है।

अतः **किन्हीं दो पूर्णांको का गुणनफल भी पूर्णांक होता है। यह गुणा का संवरक प्रगुण है।**

ध्यान दीजिए

(2) क्योंकि $(+2)\times(-3) = -6$

तथा $(-3)\times(+2) = -6$

अतः $(+2)\times(-3) = (-3)\times(+2)$

इसी प्रकार अन्य पूर्णांकों के लिए भी जाँच करके निष्कर्ष निकालिए कि

किन्हीं दो पूर्णांकों के गुणन-संक्रिया में पूर्णांकों के क्रम को बदलने पर गुणनफल नहीं बदलता। यह गुणा का क्रम विनिमेय नियम है।

(3) कोई तीन पूर्णांक लीजिए - यथा

$(-2\times3)\times5 = -6\times5 = -30$

$-2\times(3\times5) = -2\times15 = -30$

अतः $(-2\times3)\times5 = -2\times(3\times5)$

इसी प्रकार $(4\times5)\times7 = 4\times(5\times7)$

तथा $(-6\times8)\times2 = -6\times(8\times2)$

तीन पूर्णांकों के क्रम से गुणा करते समय, गुणन संक्रिया बाएँ से शुरू करें या दाएँ से शुरू करें, गुणनफल समान प्राप्त होता है।

(4) $2 \times 0 = 0 \times 2 = 0$

$(-3) \times 0 = 0 \times (-3) = 0$

तथा $0 \times 5 = 5 \times 0 = 0$

अतः किसी पूर्णांक में शून्य से गुणा करने पर गुणनफल सदैव 'शून्य' होता है।

(5) $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$; $(-2) \times 1 = 1 \times (-2) = -2$ तथा $0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$

अतः **किसी पूर्णांक में 1 से गुणा करने पर गुणनफल वही पूर्णांक आता है।**

(6) $3 \times (-1) = (-1) \times 3 = -3$; $(-5) \times (-1) = (-1) \times (-5) = 5$

इसी प्रकार कोई पूर्णांक लेकर उसमें (-1) से गुणा कर गुणनफल ज्ञात कीजिए। 3 का योगात्मक प्रतिलोम - 3, क्योंकि 3 + (- 3) = 0 तथा –5 का योगात्मक प्रतिलोम 5 या + 5 है क्योंकि – 5 + (+ 5) = 0

अतः

किसी पूर्णांक का योगात्मक प्रतिलोम ज्ञात करने के लिये उसमें - 1 से गुणा करते हैं।

ध्यान दीजिए :-

(7) (i) $-2 \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

$-2 \times 3 + (-2) \times 5 = (-6) + (-10) = -16$

अतः $-2 \times (3 + 5) = -2 \times 3 + (-2) \times 5$

इसी प्रकार, तीन अन्य पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए एवं निष्कर्ष निकालिए कि -

पहला पूर्णांक × (दूसरा पूर्णांक + तीसरा पूर्णांक) =
पहला पूर्णांक × दूसरा पूर्णांक + पहला पूर्णांक × तीसरा पूर्णांक

(ii) पूर्णांक – 3, 7 एवं 5 लें

$-3 \times (7 - 5) = -3 \times 2 = -6$

$(-3) \times 7 - (-3) \times 5 = -21 - (-15) = -21 + 15 = -6$

इसी प्रकार, तीन अन्य पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए एवं निष्कर्ष निकालिए कि -

पहला पूर्णांक × (दूसरा पूर्णांक – तीसरा पूर्णांक) =
पहला पूर्णांक × दूसरा पूर्णांक – पहला पूर्णांक × तीसरा पूर्णांक

अभ्यास 3 (d)

1. रिक्त स्थान को भरिए

7	9	11	13
7	27	55	

(क) 77 (ख) 91 (ग) 81 (घ) 98

2. निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(क) $8 \times (-4) \times (-5)$

(ख) $(-10) \times (-10) \times (-10)$

(ग) $(-2) \times 35 \times (-5)$

(घ) $(-8) \times (+57) \times 0$

(ङ) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$

(च) $(-4) \times (-8) \times (-12) \times (-5)$

3. निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(क) $(-7) \times (0) \times (57) \times (-57)$

(ख) $1456 \times 625 - 456 \times 625$

संकेत : $(1456 - 456) \times 625$ के रूप में लिखकर हल कीजिए।

(ग) $(-187) \times (-54) + (-187) \times (-46)$

संकेत : $(-187) [(-54) + (-46)]$ के रूप में लिखकर हल कीजिए

(घ) $18764 \times 99 - (-18764)$

(ङ) $15341 \times (-2) + (-15341) \times 98$

(च) $(-8) \times \{10 - 5 - 43 + 98\}$

4. **पंक्ति 'क'** के दो पूर्णांकों का गुणन फल **पंक्ति 'ख'** में दिये गये हैं। इन्हें मिलान कर लिखिए।

(क) $3 \times (-2)$, $(-4) \times (-5)$, $(-6) \times 4$, 7×5, $(-8) \times (-3)$, $5 \times (-3)$,

(ख) -15, 35, -6, 20, -24, 24

5. उस पूर्णांक को ज्ञात कीजिए जिसका -1 से गुणनफल है :

(क) -37 (ख) 49 (ग) 0

6. उत्तर के चार विकल्पों में से सही उत्तर बताइए :

(क) $(3 + 2) \times 7$ का मान है :

(i) $3 + 2 \times 7$ (ii) $3 \times 7 + 2$

(iii) $3 \times 7 + 2 \times 7$ (iv) $3 \times 7 - 2 \times 7$

(ख) $(3-2) \times 6$ का मान है :

(i) $3 \times 6 - 2 \times 6$ (ii) $3 \times 6 - 2$

(iii) $3 \times 6 + 2 \times 6$ (iv) $3 \times 2 \times 6$

(ग) $(-8) \times (-5)$ का मान है :

(i) -40 (ii) 40

(iii) 13 (iv) उपर्युक्त में कोई नहीं

(घ) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों के गुणनफल में एक धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर गुणनफल का चिह्न है :

(i) धनात्मक (ii) न तो धनात्मक और न ऋणात्मक

(iii) ऋणात्मक (iv) उपर्युक्त से कोई नहीं

7. निम्नलिखित में सत्य अथवा असत्य बताइए :

(i) 5 ऋणात्मक पूर्णांकों का सतत् गुणनफल धनात्मक है ।

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक है ।

(iii) दो पूर्णांकों में यदि केवल एक ऋणात्मक है, तो उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है ।

(iv) -17 का विपरीत + 17 है ।

(v) किसी पूर्णांक का विपरीत ज्ञात करने के लिये उसमें शून्य से गुणा करते हैं ।

(vi) 1 से किसी पूर्णांक में गुणा करने पर गुणनफल वही पूर्णांक होता है ।

3.5.4 पूर्णांकों में भाग संक्रिया :

हमने सीखा है कि पूर्ण संख्याओं में भाग संक्रिया, गुणन संक्रिया की विलोम है । साथ ही एक गुणनफल तथ्य के संगत भाग संक्रिया के दो तथ्य मिलते हैं । यथा

$5 \times 7 = 35$ का अर्थ है,

$$35 \div 5 = \frac{35}{5} = 7$$

तथा $$35 \div 7 = \frac{35}{7} = 5$$

पूर्णांकों की स्थिति में भी गुणनफल तथ्य $(-6) \times 3 = -18$ के संगत भाग संक्रिया के दो तथ्य मिलते हैं। यथा

$$-18 \div (-6) = 3$$

तथा $$-18 \div 3 = -6$$

उपर्युक्त उदाहरणों में स्पष्ट है कि

जब भाज्य और भाजक दोनों धनात्मक या दोनों ऋणात्मक हैं तो भागफल धनात्मक होता है ।

जब भाज्य तथा भाजक में एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक हो तो भागफल ऋणात्मक होता है ।

प्रयास कीजिए :

20 ÷ 4, 28 ÷ 7, (-15) ÷ (-3), (-36) ÷ (-9) के मान बताइए।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

यदि भाज्य और भाजक समान चिह्नों (अर्थात् दोनों धन अथवा दोनों ऋण) के हों तो भागफल धनात्मक होता है।

पुनः

प्रयास कीजिए :

-16 ÷ 4, 42 ÷ (-6), 54 ÷ (-9), -48 ÷ 8 के मान बताइए।

उपर्युक्त उदाहरणों से हमें ज्ञात होता है कि

यदि भाज्य और भाजक विपरीत चिह्नों के हों तो भागफल ऋणात्मक होता है।

उदाहरण 7: मान ज्ञात कीजिए

(i) $-68 \div 17$ (ii) $78 \div (-13)$

(iii) $(-75) \div (-15)$ (iv) $+64 \div (+16)$

हल : (i) $-68 \div 17 = \frac{-68}{17} = -4$ (ii) $78 \div (-13) = \frac{78}{-13} = -6$

(iii) $-75 \div (-15) = \frac{-75}{-15} = +5$ (iv) $(64) \div (16) = \frac{+64}{+16} = 4$

भाग संक्रिया के प्रगुण :

(1) $6 \div 3 = 2$; $10 \div 2 = 5$ तथा $-8 \div 4 = -2$

यहाँ भागफल 2, 5 तथा – 2 पूर्णांक हैं।

किन्तु $8 \div 3 = \frac{8}{3}$ (पूर्णांक नहीं है)

$-7 \div 11 = -\frac{7}{11}$ (पूर्णांक नहीं है)

अतः भाग-संक्रिया संवरक नहीं है।

(2) शून्येतर पूर्णांक की दशा में -

$3 \div 3 = 1$; $(-6) \div (-6) = 1$ तथा $(-2) \div (-2) = 1$

अतः

किसी शून्येतर पूर्णांक में उसी पूर्णांक से भाग देने पर भागफल सदैव 1 होता है।

(3) $5 \div 1 = 5$; $-3 \div 1 = -3$ तथा $0 \div 1 = 0$

किसी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर भागफल वही पूर्णांक होता है।

(4) $0 \div 3 = 0$; $0 \div (-2) = 0$ तथा $0 \div 7 = 0$

पूर्णांक 0 में किसी शून्येतर पूर्णांक से भाग देने पर भागफल '0' आता है।

(5) **किसी पूर्णांक में '0' से भाग परिभाषित नहीं है।**

अभ्यास 3 (e)

1. भागफल ज्ञात कीजिए ।

(क)	$21 \div (-3)$	(ख)	$-36 \div 9$	(ग)	$(-18) \div (-6)$
(घ)	$35 \div (-7)$	(च)	$(-51) \div 17$	(छ)	$0 \div (-11)$
(ज)	$(-1728) \div 12$	(त)	$-15625 \div 125$	(थ)	$(-729) \div (-9)$
(द)	$1051 \div (-1)$	(ध)	$20000 \div (-1000)$	(न)	$17672 \div (-17672)$

2. प्रश्नवाचक चिह्न ? के स्थान पर संख्या होगी-

(i) $(18 - 3) + (9 \times 2) - 6 = ?$

(क) 12 (ख) 9 (ग) 27 (घ) 39

(ii) $(28 + 4) - (10 \times 5) + (4 \div 2) = ?$

(क) 23 (ख) - 12 (ग) 17 (घ) - 16

3. स्तम्भ 'क' और 'ख' दिये गये हैं । स्तम्भ 'क' में अंकित भाग के प्रश्नों के उत्तर स्तम्भ 'ख' में अव्यवस्थित क्रम में दिये गये हैं । अपनी अभ्यास पुस्तिका में स्तम्भ 'क' के भाग के प्रश्न का स्तम्भ 'ख' में उसके उत्तर से मिलान कीजिए ।

क	ख
$6 \div 3$	6
$-12 \div 6$	-4
$18 \div -6$	-7
$-21 \div -7$	2

24	÷	4	–3
–25	÷	–5	3
–21	÷	3	–2
28	÷	-7	5

4. प्रश्न के प्रत्येक खंड में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं । इन उत्तरों में से केवल एक सही है । सही उत्तर अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए ।

(क) $-36 \div 9$ का चिह्न है :

(i) धन (ii) ऋण

(iii) न तो धन और न ऋण (iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(ख) $27 \div (-3)$ का चिह्न है :

(i) न तो धन और न ऋण (ii) धन

(iii) ऋण (iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(ग) $-36 \div (-4)$ का चिह्न है :

(i) धन (ii) न तो धन और न ऋण

(iii) ऋण (iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

(घ) $28 \div 7$ के मान का चिह्न है :

(i) ऋण (ii) धन

(iii) न तो धन और न ऋण (iv) उपर्युक्त में से कोई नहीं

3.6. कोष्ठकों (Brackets) का प्रयोग :

सविता एवं मैरी दोनों सहेली हैं। एक दिन दोनों सेब खरीदने बाजार गयीं । सविता ने 3 किग्रा और मैरी ने 5 किग्रा सेब खरीदे । यदि दुकानदार ₹ 40 प्रति किग्रा की दर से सेब बेच रहा है तो दोनों मिलकर दुकानदार को कितने रुपये देंगी ?

सविता ने कुल धनराशि निम्नवत् परिकलित की :

$3 + 5 \times 40$

$= 3 + 200$

= ₹ 203

मैरी पहले दोनों सहेलियों द्वारा खरीदे गये सेब की कुल मात्रा 3 किग्रा + 5किग्रा = 8 किग्रा ज्ञात करती है और फिर

कुल धनराशि = 8×40

= ₹ 320

सोचिए, किसका परिकलन सही है और क्यों ? दुकानदार बताता है कि मेरी ने सही हिसाब लगाया है और उसे कुल ₹ 320 ही चाहिए । दोनों दुकानदार को ₹ 320 अदा कर देती हैं किन्तु सविता के मन में एक उलझन बनी रहती

है कि उसका परिकलन क्यों गलत है। सविता घर आकर अपनी बड़ी बहन सुमन से पूछती है तो सुमन सविता को ऐसी स्थिति में कोष्ठकों का प्रयोग कर परिकलन करने की बात निम्नवत् समझाती है :

कुल धनराशि = ₹ (3 + 5) × 40

= ₹ 8 × 40

= ₹ 320

कोष्ठकों का उचित प्रयोग कर पहले कोष्ठकों के अन्दर की संख्याओं को एक संख्या के रूप में प्राप्त कर लेते हैं और पुनः कोष्ठक के बाहर दी हुई संक्रिया कर अभीष्ट परिकलन करते हैं ।

ध्यान दीजिए और स्मरण रखें :

(i) सामान्यतः हम क्रम में पहले भाग, फिर गुणा और फिर जोड़ और घटाने की संक्रिया करके पद संहतियों को सरल करते हैं ।

(क) $35 \div 7 + 4 = 5 + 4 = 9$

(ख) $13 - 4 \div 2 = 13 - 2 = 11$

(ग) $55 - 6 \times 3 + 32 - 3$

$= 55 - 18 + 32 - 3$

$= 55 + 32 - 18 - 3$

$= 87 - 21$

$= 66$

(ii) यदि हम कहें कि 36 में 4 और 3 के गुणनफल से भाग दीजिए तो इसे निम्नांकित ढंग से लिखा जाएगा।

$36 \div (4 \times 3)$

यदि इसे $36 \div 4 \times 3$ लिखा जाता, तो उत्तर $9 \times 3 = 27$ आता जो गलत है ।

इसी प्रकार $48 \div (3 + 5)$ का अर्थ है कि पहले 3 और 5 को जोड़कर योगफल से 48 में भाग दीजिए। यदि हम कोष्ठक () का प्रयोग नहीं करते हैं तो इसका रूप $48 \div 3 + 5$ होता है । इसके अनुसार इसका मान परम्परागत ढंग से निम्नांकित है।

$48 \div 3 + 5 = 16 + 5 = 21$

जबकि $48 \div (3 + 5) = 6$

अतः इस प्रकार की अशुद्धियों से बचने के लिए कोष्ठक का प्रयोग किया जाता है ।

(iii) कभी-कभी निम्नलिखित प्रकार की समस्याएं सामने आती हैं ।

120 में 4 और 3 के गुणनफल से 8 बड़ी संख्या का भागफल ज्ञात कीजिए ।

4 और 3 के गुणनफल (4 × 3) के रूप में लेते हैं ।

4 और 3 के गुणनफल से 8 अधिक संख्या को $\{(4 \times 3) + 8\}$ के रूप में समझते हैं। इस प्रकार

अभीष्ट भागफल $= 120 \div \{(4 \times 3) + 8\} = 6$

ऐसा करने में एक दूसरे प्रकार के कोष्ठक '{ }' का प्रयोग किया है ।

गणित में सामान्यतः निम्नलिखित चार प्रकार के कोष्ठकों का प्रयोग प्रचलित है ।

प्रतीक	नाम
—	रेखा कोष्ठक (Vinculum)
( )	छोटा कोष्ठक (Parentheses ; Round Bracket)
{ }	मँझला कोष्ठक (Braces, Curly Bracket)
[ ]	बड़ा कोष्ठक (Square Bracket)

प्रत्येक कोष्ठक का बायां भाग कोष्ठक का प्रारम्भ और दायाँ भाग कोष्ठक का अंत व्यक्त करता है ।

(i) क्रमानुसार रेखा कोष्ठक, छोटा कोष्ठक, मँझला कोष्ठक तथा बड़ा कोष्ठक हटाकर सरलीकरण की क्रिया की जाती है । नियम यह है कि कोष्ठक चाहे जिस क्रम में लगे हों सबसे पहले अन्दर के कोष्ठक को क्रम से हटा कर क्रिया सम्पन्न की जाती है ।

(ii) कोष्ठक के पूर्व यदि '+' चिह्न होता है तो कोष्ठक हटाने पर कोष्ठक के अन्दर '+' और '-' चिह्न यथावत् रहते हैं ।

इसी प्रकार यदि कोष्ठक के पूर्व '-' ऋण चिह्न हो तो कोष्ठक के हटाने पर उसके अन्दर के '+' और '-' चिह्न अंतःपरिवर्तित हो जाते हैं ।

(iii) यदि कोष्ठक के पहले या बाद में कोई संख्या हो और उस संख्या तथा कोष्ठक के बीच में कोई चिह्न न हो तो वहाँ पर गुणा का चिह्न समझना चाहिए ।

(v) प्रत्येक कोष्ठक को हटाने से पूर्व उसका सरलीकरण कर लेना चाहिए।

उदाहरण 8: $18-[4+\{16-(18-5)\}$, का मान ज्ञात कीजिए :

हल :

$$18-[4+\{16-(18-5)\}]$$
$$=18-[4+\{16-13\}]$$
$$=18-[4+3]$$
$$=18-7$$
$$=11$$

BODMAS नियम :

यदि व्यंजक या पद संहति में 'का', ÷, ×, +, −, ( ) का प्रयोग हुआ हो तो BODMAS अक्षरों से व्यक्त चिह्नों को क्रमानुसार पहले सरल किया जाता है ।

B	=	**Brackets**	कोष्ठक	( )
O	=	**Of**	का	का
D	=	**Division**	भाग	÷
M	=	**Multiplication**	गुणा	×
A	=	**Addition**	योग	+
S	=	**Subtraction**	घटाना	−

कोष्ठकों के सरलीकरण में 'कोकाभागुयोघ' नियम का पालन अधिक सुविधाजनक रहता है, जहाँ को = कोष्ठक, का = का, भा = भाग, गु = गुणा, यो = योग, घ = घटाना ।

उदाहरण 9 : $14-[12-\{9-(7-\overline{6-2})\}]$ को सरल कीजिए ।

हल : $14-[12-\{9-(7-\overline{6-2})\}]$

$= 14-[12-\{9-(7-4)]$ रेखा कोष्ठक हटाने पर

$= 14-[12-\{9-3\}]$ छोटा कोष्ठक हटाने पर

$= 14-[12-6]$ मँझला कोष्ठक हटाने पर

$= 14-6$ बड़ा कोष्ठक हटाने पर

$= 8$

उदाहरण 10. सरल कीजिए : $(-12)+(-6)\div 2-[(-5)\times(-4)-\{2-(3-5)\}]$

हल : $(-12)+(-6)\div 2-[(-5)\times(-4)-\{2-(3-5)\}]$

$=(-12)+(-6)\div 2-[(-5)\times(-4)-\{2+2\}]$

$=(-12)+(-6)\div 2-[(-5)\times(-4)-4]$

$=(-12)+(-6)\div 2-[20-4]$

$=(-12)+(-6)\div 2-16$

$=(-12)+(-3)-16$

$=-15-16=-31$

अभ्यास 3 (f)

1. निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $21+18\div 3$ (ii) $123-81\div 9$

(iii) $13-(8\times 2)\div 3$ (iv) $12-(13-12\div 3)$

(v) $28-5\times 7\div 7$ (vi) $117\div(7+6)$

(vii) $(-17) + 8 \div (7 - 3)$ (viii) $(-3) + (-6) \div (-3)$

(ix) $17 + (-2) \times (-5) - 4$ (x) $13 \div \overline{4-3}$

(xi) $(-36) \times (-1) + (-24) \div 6$ (xii) $(-5) - (-45) \div (-15) + (-3) \times 5$

2. कोष्ठकों की सहायता से निम्नलिखित कथनों के लिए गणितीय पद संहति लिखिए ।

(क) आठ से छः और तीन के योगफल का गुणा ।

(ख) अठारह में चार और दो के योगफल का भाग ।

(ग) बीस में छः और दो के अन्तर से भाग ।

(घ) चार और पाँच के गुणनफल से बारह का घटाना ।

(ङ) चालीस में पाँच और दो के योगफल से एक अधिक संख्या का भाग ।

(च) तीन से बारह और सात के अन्तर से एक कम संख्या का गुणा ।

3. सरल कीजिए :

(क) $20 + \{9 - 5 + (6 - 4)\}$

(ख) $80 \times [56 - \{7 \times 8 + (13 - 2 \times 5)\}]$

(ग) $121 \div [16 - \{14 - 3\,(9 - 6)\}]$

(घ) $5\,[18 + \{3 + 6\,(5 - 3)\}]$

(ङ) $16 + \{1 + (16 - 3) \times 4\}$

(च) $3 - [3 - \{3 - (3 - \overline{3-3})\}]$

(छ) $112 - [121 \div (11 \times 11) - (-4) - \{3 - \overline{8-1}\}]$

(ज) $(-2)\,\{(-5) + (-25)\} \times (-7) - (4 - 6)\,(-5)$

(झ) 4 का $[25 - 18 \div \{7 - 2$ का $3 - (13 - \overline{4-3}) + 5\}]$

इस इकाई में हमने सीखा

1. दैनिक जीवन में हमें अनेक बार विपरीत मानों के मापन, छोटी पूर्ण संख्या से बड़ी पूर्ण संख्या घटाने की आवश्यकता पड़ती है जिसके कारण पूर्ण संख्याओं के संग्रह को विस्तारित करना पड़ता है । इसके लिए प्राकृतिक सख्ंयाओं 1, 2, 3, 4, ... के संगत हम नयी संख्याएं -1, -2, -3, -4, ... बनाते हैं।

2. पूर्णांकों के संग्रह में 1, 2, 3, 4, ... अर्थात् प्राकृतिक संख्याएँ धन पूर्णांक और -1, -2,-3, ... ऋण पूर्णांक कहलाते हैं । शून्य मात्र एक ऐसा पूर्णांक है जो न तो धनात्मक है और न ऋणात्मक।

3. पूर्णांकों को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है । प्रत्येक धन पूर्णांक $+a$ के संगत एक ऋण पूर्णांक $-a$ होता है । दोनों का योगफल सदैव '0' होता है अर्थात् $a + (-a) = 0$,व्यापकत: a और $-a$ परस्पर योगात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं।

4. शून्य का योगात्मक प्रतिलोम शून्य है।

5. प्रत्येक धन पूर्णांक समस्त ऋण पूर्णांकों से बड़ा होता है ।

6. शून्य प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा और प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है ।

7. दो धन पूर्णांकों का योगफल धन पूर्णांक और दो ऋण पूर्णांकों का योगफल ऋण पूर्णांक होता है ।

8. असमान चिह्नों वाले पूर्णांकों का योगफल जोड़े जाने वाले पूर्णांकों के संख्यात्मक मानों के अन्तर के पूर्व बड़े संख्यात्मक मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगा कर प्राप्त करते हैं ।

9. पूर्णांकों में योग संक्रिया संवरक, क्रमविनिमेय और साहचर्य होती है ।

10. पूर्णांकों में योग संक्रिया का तत्समक अवयव '0' होता है ।

11. पूर्णांकों में घटाने की संक्रिया संवरक है किन्तु क्रम विनिमेय और साहचर्य नियमों का पालन नहीं करती।

12. दो धन अथवा दो ऋण पूर्णांकों का गुणनफल सदैव धन पूर्णांक होता है किन्तु विपरीत चिह्न वाले पूर्णांकों का गुणनफल सदैव ऋण पूर्णांक होता है ।

13. पूर्णांकों के गुणन संक्रिया में संवरक, क्रमविनिमेय और साहचर्य प्रगुण होते हैं ।

14. पूर्णांकों में भाग-संक्रिया संवरक नहीं है और न ही क्रमविनिमेय और साहचर्य नियमों का पालन करती हैं।

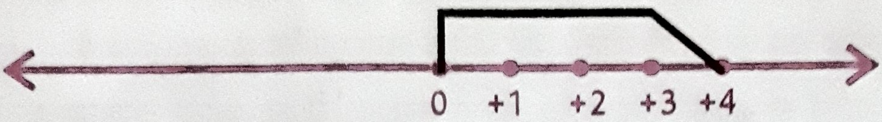
15. गणना में अशुद्धियों से बचने के लिए कोष्ठकों का प्रयोग करते हैं ।

16. सामान्यतः क्रमानुसार रेखा कोष्ठक, छोटा कोष्ठक, मँझला कोष्ठक और अन्त में बड़ा कोष्ठक हटाकर सरलीकरण की क्रिया की जाती है । नियम यह है कि कोष्ठक चाहे जिस क्रम में लगे हों, सबसे पहले अन्दर के कोष्ठक को क्रम से हटा कर सरलीकरण की क्रिया सम्पन्न की जाती है ।

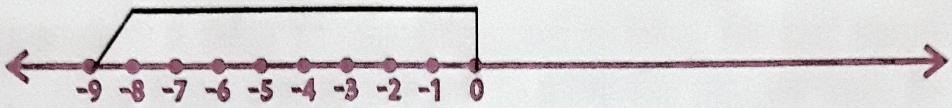
अभ्यास 3 (a)

1. (ii), **2.** (iii), **3.** (i) - 4^0 सेल्सियस, (ii) + 7, (iii) - ₹ 3.28, (iv) - 18, (v) +1,000 मीटर, **4.** (i) - 9, (ii) + 21, (iii) - 39, (iv) + 41, (v) - 91

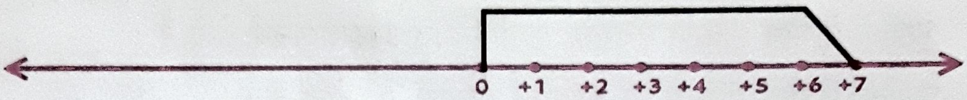
5. (क)



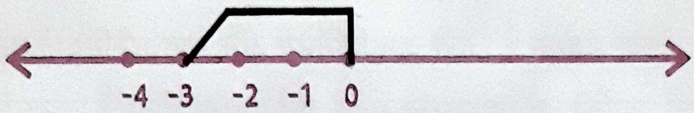
(ख)



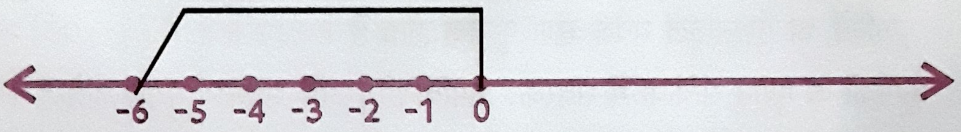
(ग)



(घ)



(ङ)



6. (क) E, (ख) −3, (ग) C, (घ) + 5, −5, + 6; (ङ) K, D, M ; **7.** (क) -1, 0, +1, +2, (ख) 1, 2, 3, 4, 5; (ग) −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3; (घ) −4, −3, −2, −1, 0, 1; (ङ) −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4; (च) −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3; **8.** (क) 3, 4, (ख) −3, −2, −1; (ग) 4, 5, 6, 7; (घ) 1, 2, 3; (ङ) −4,−3; (च) 0, 1, 2, 3; **9.** (क) 13, (ख) 12, (ग) 37, (घ) 0, (ङ) 47, (च) 101; **10.** (क) असत्य, (ख) सत्य, (ग) असत्य, (घ) सत्य, (ङ) असत्य, (च) असत्य, (छ) सत्य ।

अभ्यास 3 (b)

1. (i) **2.** (ii) **3.** (क) पूर्णांक, (ख) धन पूर्णांक, (ग) ऋण पूर्णांक, **4.** (क) सत्य, (ख) असत्य, (ग) असत्य, (घ) सत्य, (च) असत्य, (छ) सत्य, (ज) सत्य।

अभ्यास 3 (c)

1. (ii) **2.**(i) 5, (ii) −5, (iii) −20, (iv) −997, (v) −1; **3.** (क) <, (ख) >, (ग) <; **4.** (iii) **5.** (i) 8, (ii) −4, (iii) −19, (iv) −996, (v) 1; **6.** −21^0C; **7.** 81 वर्ष; **8.** 20446 मी

अभ्यास 3(d)

1. (ख), **2.**, (क) 160, (ख) −1000, (ग) 350, (घ) 0, (ङ) 24, (च) 1920; **3.** (क) 0, (ख) 625000, (ग) 18700, (घ) 1876400, (ङ) −1534100, (च) −480; **4.** 3 × (−2) →

−6, (−4) × (−5) → 20,(−6) ×4 → −24, 7 × 5 → 35, (−8) × (−3) → 24, 5 × (−3) → −15 **5.** (क) 37, (ख) -49, (ग) 0; **6.** (क) (iii), (ख) (i), (ग) (ii), (घ) (iii); **7.** (i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य, (vi) सत्य,

अभ्यास 3 (e)

1. (क) −7, (ख) −4, (ग) 3, (घ) −5, (च) −3, (छ) 0, (ज) −144, (त) −125, (थ) 81, (द) −1051, (ध) −20, (न) −1; **2.** (i) (ग) 27, (ii) (घ) −16, **3.** 6 ÷ 3 → 2, -12 ÷ 6 → -2, 18 ÷ -6 → -3, -21 ÷ -7 → 3, 24 ÷ 4 → 6, -25 ÷ -5 → 5, -21 ÷ 3 → --7, 28 ÷ -7 → -4; **4.** (क) (ii) (ख) (iii) (ग) (i) (घ) (ii)।

अभ्यास 3 (f)

1. (i) 27, (ii) 114, (iii) 0, (iv) 3, (v) 0, (vi) 9, (vii) −15, (viii) −1, (ix) 23, (x) 13, (xi) 32, (xii) −23; **2.** (क) (6 + 3) × 8, (ख) 18 ÷ (4 + 2), (ग) 20 ÷ (6 − 2), (घ) (4 × 5) − 12 (ङ) 40 ÷ {(5 + 2) + 1}, (च) 3 × {(12 − 7) − 1}; **3.** (क) 26, (ख) −240, (ग) 11, (घ) 165, (ङ) 69, (च) 0, (छ) 103, (ज) −430, (झ) 112.