

गुणा : ऊर्ध्वतिर्यक विधि से



❖ गुणा : ऊर्ध्वतिर्यक विधि से

भूमिका

वैदिक गणित सूत्र हमारे प्राचीन वेदों से प्राप्त गणितीय गणना की परम्परा का एक अंग है। जब गणितीय गणना के लिए हमारे पास न तो कैलकुलेटर थे और न ही कम्प्यूटर तब गणनाओं को तेजी से करने के लिए इन गणित सूत्रों का उपयोग किया जाता है। आप सभी ने संख्याओं की गुणा करना सीख लिया है। यहाँ पर हम वैदिक सूत्रों का उपयोग द्विअंकीय, त्रिअंकीय गुणा करने में करेंगे।

ऊर्ध्वतिर्यक सूत्र-

ऊर्ध्वतिर्यक सूत्र गुणन के सभी प्रकारों पर लगने वाला व्यापक सूत्र है (यह संख्याओं के भाग करने में भी काम आता है)। यह सूत्र स्वयं में बहुत ही संक्षिप्त है जिसमें केवल एक ही भौगिक शब्द है जिसका अर्थ खड़े (ऊर्ध्वाधर) तिरछे (तिर्यक) से है।

गणितीय अर्थ-

i. ऊर्ध्व गुणा



ii. तिर्यक गुणा



iii. ऊर्ध्व व तिर्यक गुणा



सर्वप्रथम इसके प्रारंभिक अनुप्रयोग देखेंगे -

1.1 3 व 5 का ऊर्ध्वगुणा

$$\begin{array}{r} 3 \uparrow \\ 5 \uparrow \\ \hline 3 \times 5 \end{array}$$

1.2 35 व 67 का तिर्यक गुणा

$$\begin{array}{r} 3 \swarrow \quad \searrow 5 \\ 6 \swarrow \quad \searrow 7 \\ \hline (3 \times 7) + (6 \times 5) \end{array}$$

1.3 (123) व (876) का ऊर्ध्व व तिर्यक गुणा

$$\begin{array}{r} 1 \swarrow \quad \uparrow 2 \quad \searrow 3 \\ 8 \swarrow \quad \uparrow 7 \quad \searrow 6 \\ \hline (1 \times 6) + (2 \times 7) + (3 \times 8) \end{array}$$

ध्यान दीजिए- गुणा की प्रक्रिया में जिस संख्या से गुणा करते हैं उस संख्या को गुणक व जिस संख्या में गुणा करते हैं उसे गुण्य कहते हैं।

- एक सरल उदाहरण इसकी कार्यविधि को स्पष्ट कर देगा। मान लीजिए कि हमें 12 को 13 से गुणा करना है तो

13 - गुणक

12 - गुण्य

कार्यविधि-

- हम गुण्य के सबसे दायें अंक अर्थात् 2, तथा गुणक के सबसे दायें अंक अर्थात् 3 से खड़ा (ऊर्ध्व) गुणन करेंगे और उनके गुणनफल से हमें उत्तर की सबसे दाईं संख्या मिल जायेगी।

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \uparrow \\ 1 \quad 3 \uparrow \\ \hline 6 \end{array}$$

- अब हम 1 और 2 तथा 1 और 3 का तिरछा गुणन करेंगे दोनों गुणनफलों को जोड़ेंगे इससे उत्तर की मध्य अंक (संख्या) मिल जायेगी।

$$\begin{array}{r} 1 \swarrow \quad \searrow 2 \\ 1 \swarrow \quad \searrow 3 \\ \hline (2+3) \end{array}$$

- iii. 1 व 1 का (संख्याओं के दाहिनी अंक) ऊर्ध्व गुणन करेंगे तथा हमें गुणनफल से सबसे बायीं ओर की संख्या प्राप्त होगी।

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \uparrow 2 \\ \boxed{1} \uparrow 3 \\ \hline 1 \times 1 \end{array}$$

सम्पूर्ण रूप से,

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \\ \hline 1/3 + 2/6 \\ = 156 \end{array}$$

उदाहरण-

$$\begin{array}{r} 2 \quad \boxed{1} \uparrow \\ 1 \quad \boxed{4} \uparrow \\ \hline 2/8 + 1/4 \\ = 294 \end{array}$$

उदाहरण-

$$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \\ 4 \quad 1 \\ \hline 16/4 + 4/1 \\ = 1681 \end{array}$$

टिप्पणी- जब किसी भी एक फल में एक से अधिक अंक होता है तब उसके सबसे दाहिनी अंक को लिखकर उसके पूर्ववर्ती अंक या अंकों को बाईं तरफ के अंक में जाना चाहिए और बाईं तरफ के हिस्से में जोड़ना चाहिए। इस तरह वहन किए हुए अंकों को निम्नलिखित उदाहरणों की तरह लिखा जा सकता है।

उदाहरण-

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ 1 \quad 5 \\ \hline 1/5 + 5/5 \\ = 225 \end{array}$$

25 का दहाई अंक छोटे अंक में लिखा जायेगा तथा बायें ओर के अंक में जोड़ दिया जायेगा।

$$5 + 5 + 2 = 12$$

12 का दहाई अंक 1 बायें ओर के अंक में जोड़ दिया जायेगा।

इसी प्रक्रिया के अन्य उदाहरण निम्नवत् है-

उदाहरण-

$$\begin{array}{r} 3 \quad 7 \\ 3 \quad 3 \\ \hline 9/_3 0/_2 1 \end{array}$$

$$= 1221$$

उदाहरण-

$$\begin{array}{r} 4 \quad 9 \\ 4 \quad 9 \\ \hline 16/_7 2/_8 1 \end{array}$$

$$= 2401$$

अभ्यास- 17 (a)

1. निम्न को हल कीजिए-

- ab तथा ef के ऊर्ध्व गुणा करें।
- 123 तथा 789 के सभी ऊर्ध्व गुणा करें।
- 13 तथा 24 के सभी तिर्यक गुणक लिखिए

2. निम्नांकित जोड़ों का ऊर्ध्वतिर्यक विधि गुणन ज्ञात कीजिए-

- 16 और 11
- 21 और 16
- 23 और 21

3. गुणन ज्ञात कीजिए-

- 32 और 32
- 83 और 92
- 46 और 35

उत्तरमाला- x(a)

1. i. ae तथा bf
 ii. $(1 \times 7), (2 \times 8), (3 \times 9)$
 iii. $(1 \times 4), (3 \times 2)$
2. i. 176
 ii. 336
 iii. 483
3. i. 1024
 ii. 7636
 iii. 1610

किन्हीं तीन अंकों के गुण्य का किन्हीं तीन अंक के गुणक से गुणन

क्रियाविधि- 111 और 111 का गुणन

- i. हम गुण्य के सबसे दायें अंक अर्थात् 1 से गुणक से सबसे दायें अंक अर्थात् 1 का ऊर्ध्व गुणन करेंगे।

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad \boxed{1} \\ 1 \quad 1 \quad \boxed{1} \\ \hline 1 \end{array}$$

- ii. अब हम दायें तरफ से गुण्य तथा गुणक के दो-दो अंकों की तिर्यक गुणा करेंगे एवं उन्हें जोड़ेंगे।

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline (1+1) \end{array}$$

- iii. अब गुण्य तथा गुणक के प्रथम तथा अन्तिम अंकों की तिर्यक गुणा तथा मध्य अंक की ऊर्ध्व गुणा करेंगे व उन्हें जोड़ेंगे।

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline (1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 1) \end{array}$$

iv. गुण्य तथा गुणक के प्रथम दो अंकों की आपस में तिर्यक गुणा करेंगे।

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline (1 \times 1) \end{array}$$

v. गुण्य तथा गुणक के बायें अंकों की ऊर्ध्व गुणा करेंगे।

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

सम्पूर्ण रूप से,

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 1/2/2+1/2/1 \\ \hline = 12321 \end{array}$$

उदाहरण - 102 और 104 की गुणा

i.
$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad \boxed{2} \\ 1 \quad 0 \quad \boxed{4} \\ \hline 8 \end{array}$$

ii.
$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 2 \\ 1 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

iii.
$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 2 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 0 \quad 4 \\ \hline (4)+(2)+(0) \end{array}$$

iv.
$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 2 \\ 1 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

v.

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \uparrow 0 \ 2 \\ \boxed{1} \uparrow 0 \ 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

सम्पूर्ण रूप से,

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 2 \\ \times 1 \ 0 \ 4 \\ \hline 1/0/6/0/8 \end{array}$$

$$= 10608$$

हासिल के साथ तीन अंकों की गुणा

उदाहरण - 109 और 111 की गुणा

i.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ \boxed{9} \uparrow \\ \times 1 \ 1 \ \boxed{1} \uparrow \\ \hline 9 \end{array}$$

ii.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 9 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 9 \end{array}$$

iii.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 9 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline (1)+(9)+(0)=10 \end{array}$$

iv.

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 9 \\ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

v.

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \uparrow 0 \ 9 \\ \boxed{1} \uparrow 1 \ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

सम्पूर्ण रूप से,

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 9 \\ \times 1 \ 1 \ 1 \\ \hline 1/1/0/9/9 \end{array}$$

$$= 12099$$

अभ्यास- x(b)

1. निम्नांकित जोड़ों का गुणन ज्ञात करें-

i. 101 और 102

ii. 103 और 100

2. गुणन ज्ञात कीजिए-

i. 116 और 114

ii. 582 और 231

iii. 116 और 117

उत्तरमाला- x(b)

1 i. 10302

ii. 10300

2 i. 13224

ii. 134442

iii. 13572

आधार पद्धति द्वारा गुणन (प्राचीन भारतीय गणितीय पद्धति)

आइए हम आज कल की प्रचलित गुणन विधियों से अलग हटकर वैदिक गणित की सामान्य व आकर्षक विधियों को सीखने का प्रयास करते हैं। इस विधि में हमें 5 के ऊपर के पहाड़ों को रटने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।

आधार पद्धति-

आधार सदैव 10 की कोई घात या स्वयं 10 होता है। इस प्रकार आधार क्रमशः 10, 100, 1000, 10000, होते हैं। यदि इन आधारों के समीप की दो संख्याओं का परस्पर गुणा करते हैं तो सर्वप्रथम हम "निखिलम् सूत्र" का प्रयोग कर संख्याओं का आधार से पूरक ज्ञात करते हैं। यदि संख्या आधार से छोटी है तो पूरक ऋणात्मक होगा और यदि संख्या आधार से बड़ी है तो पूरक धनात्मक होगा।

संख्या	आधार	पूरक
8	10	$8 - 10 = -2$
15	10	$15 - 10 = +5$
95	100	$95 - 100 = -5$
102	100	$102 - 100 = +2$
112	100	$112 - 100 = +12$
1009	1000	$1009 - 1000 = +9$

आधार पद्धति से गुणन की क्रियाविधि -

चरण 1 - दी गयी संख्या व उसका पूरक ज्ञात कीजिए।

चरण 2 - गुणा के दो पक्ष-

दाँया पक्ष- पूरक चिन्ह (धनात्मक, ऋणात्मक) सहित।

बाँया पक्ष- संख्या

चरण 3 - पूरक को गुणा करके (हासिल आने पर दहाई के अंक को बायें पक्ष की संख्या के इकाई के अंक के साथ हासिल को जोड़ दीजिए।

चरण 4 - बायें पक्ष की संख्या को तिर्यक पूरक से घटाएँ या जोड़े (चिन्ह के आधार पर)।

उदाहरण- 9 का 7 से गुणा कीजिए।

चरण 1 -

संख्या	पूरक
9	$9 - 10 = -1$ (संख्या - आधार)
7	$7 - 10 = -3$

चरण 2 -

बाँया पक्ष	दाँया पक्ष
9	-1
7	-3

चरण 3 - दायें पक्ष के पूरक की गुणा $1 \times 3 = 3$

अतः

$$\begin{array}{r} 9 \quad -1 \\ 7 \quad -3 \\ \hline 6 \quad / \quad 0 \\ \quad \quad 3 \\ \hline 6 \quad / \quad 3 \end{array}$$

उत्तर- 63

उदाहरण - 6 का 7 से गुणा कीजिए।

बाँया पक्ष	↙ ↘	दाँया पक्ष
6		- 4
7		- 3
3 / 0		
12		
3+1 / 2		
4 / 2		

(आधार 10 होने के कारण 12 का दहाई का अंक दायें पक्ष पर हासिल जायेगा)

उत्तर - 42

उदाहरण - 95 का 99 से गुणा कीजिए।

बाँया पक्ष	↙ ↘	दाँया पक्ष
95		- 5
99		- 1
94 / 00		
+ 5		
94 / 05		

(आधार 100)

उत्तर - 9405

उदाहरण - 102 का 107 से गुणा कीजिए।

बाँया पक्ष	↙ ↘	दाँया पक्ष
102		+ 2
107		+ 7
109 / 00		
+ 14		
109 / 14		

(आधार 100)

उत्तर - 10914

प्रयास करें- उपरोक्त क्रियाविधि से आधार 1000, 10000 इत्यादि के प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें।

अभ्यास- x(c)

1. निम्नलिखित प्रश्नों को आधार पद्धति से हल कीजिए-

- | | |
|--------------------|----------------------|
| (क) 9 का 8 से गुणा | (ख) 11 का 12 से गुणा |
| (ग) 7 का 6 से गुणा | (घ) 99 का 92 से गुणा |

2. रवि अपने विद्यालय के खेल के मैदान में 97 आम के पेड़ों को 96 पंक्ति में लगाना चाहता है। रवि को कुल कितने आम के पेड़ की आवश्यकता होगी?
3. गुणा कीजिए-
- (क) 998 का 997 से गुणा (ख) 1012 का 1007 से गुणा
- (ग) 107 का 102 से गुणा

अब तक हमने सीखा कि दोनों पूरक संख्याएँ या तो धनात्मक (+) या फिर ऋणात्मक (-) होती हैं। अब हम ऐसी संख्याओं का गुणन करना सीखेंगे जिसमें एक धनात्मक पूरक व एक ऋणात्मक पूरक हो।

यह भी जानें-

धनात्मक पूरक	×	धनात्मक पूरक	=	धनात्मक पूरक
ऋणात्मक पूरक	×	ऋणात्मक पूरक	=	धनात्मक पूरक
धनात्मक पूरक	×	ऋणात्मक पूरक	=	ऋणात्मक पूरक
ऋणात्मक पूरक	×	धनात्मक पूरक	=	ऋणात्मक पूरक

उदाहरण - 12 का 9 से गुणा कीजिए।

बाँया पक्ष		दाँया पक्ष	
12	↗ ↘	+ 2	
9		- 1	
11	/	0	
		- 2	
10	/	10	
		- 2	
10	/	8	

(आधार 10)

उत्तर - 108

उदाहरण - 15 का 6 से गुणा कीजिए।

बाँया पक्ष		दाँया पक्ष	
15	↗ ↘	+ 5	
6		- 4	
11	/	0	
		- 20	
11-2	/	0	
9	/	0	

उत्तर - 90

उदाहरण - 105 का 96 से गुणा कीजिए।

बाँया पक्ष	/	दाँया पक्ष
105		+ 5
96		- 4
101 / 00		
		- 20
100 / 100		
		- 20
100 / 80		

उत्तर - 10080

अभ्यास- x(d)

1. निम्नलिखित प्रश्नों को आधार पद्धति से हल कीजिए-
 - (क) 11 का 9 से गुणा
 - (ख) 12 का 8 से गुणा
 - (ग) 15 का 6 से गुणा
2. गुणा कीजिए-
 - (क) 107 का 95 से गुणा
 - (ख) 102 का 99 से गुणा
 - (ग) 109 का 91 से गुणा
3. गुणा कीजिए-
 - (क) 992 का 1003 से गुणा
 - (ख) 998 का 1009 से गुणा

उत्तरमाला

अभ्यास- x(c)

- | | | | |
|---------------|-------------|-----------|----------|
| 1. (क) 72 | (ख) 132 | (ग) 42 | (घ) 9108 |
| 2. 9312 | | | |
| 3. (क) 995006 | (ख) 1019084 | (ग) 10914 | |

अभ्यास- x(d)

- | | | |
|---------------|-------------|----------|
| 1. (क) 99 | (ख) 96 | (ग) 90 |
| 2. (क) 10165 | (ख) 10098 | (ग) 9919 |
| 3. (क) 994976 | (ख) 1006982 | |

हमने सीखा

- बच्चे वैदिक गणित की आधार पद्धति से अवगत हो गये हैं।
- बच्चे एक धनात्मक पूरक व एक ऋणात्मक पूरक वाले प्रश्नों को आधार पद्धति से हल कर ले रहे हैं।
- बच्चे आधार से कम (ऋणात्मक पूरक) वाली विभिन्न अंकों वाली संख्याओं का गुणन सीख गये हैं।
- बच्चे आधार से ज्यादा (धनात्मक पूरक) वाली विभिन्न अंकों वाली संख्याओं का गुणन सीख गये हैं।