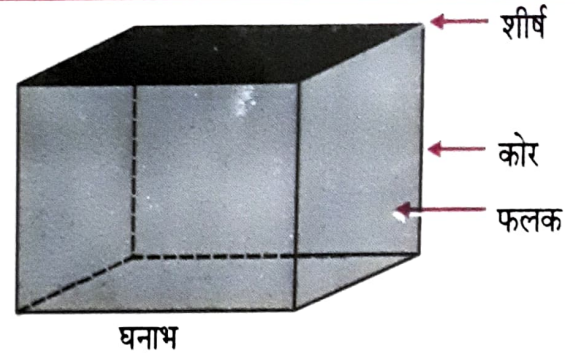




- ❖ घन, घनाभ, पिरामिड तथा प्रिज्म के अंग
- ❖ आयतन की अवधारणा
- ❖ घन एवं घनाभ का आयतन (सूत्र की सहायता से)

16.1 भूमिका :

आपने ज्यामितीय अवधारणा के अन्तर्गत ठोस वस्तुओं और उनके फलकों के विषय में अध्ययन कर लिया है। आप यह भी जानते हैं कि कुछ वस्तुओं के फलक समतल, कुछ के समतल और वक्र दोनों प्रकार के तथा कुछ वस्तुओं के फलक केवल वक्र ही होते हैं। आपने गणित किट के अन्तर्गत घन, घनाभ, बेलन, गोला तथा शंकु को देखा है। इनमें घन एवं घनाभ के सभी फलक समतल हैं, बेलन के दोनों सिरे समतल तथा बीच का भाग वक्र तल होता है, शंकु का एक सिरा समतल तथा दूसरा नुकीला जिसे शीर्ष कहते हैं, बीच का तल वक्र होता है, जबकि गोले का तल केवल वक्र होता है। आइए अब हम समतल फलक वाले घन तथा घनाभ के समान आकृति वाली वस्तुओं की कोर, फलक और शीर्ष के विषय में जानें।



16.2 घन, घनाभ, पिरामिड तथा प्रिज्म के अंग

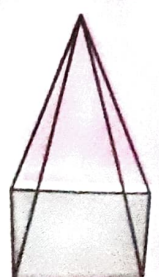
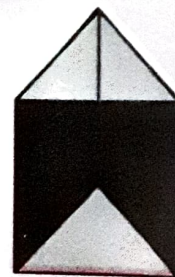
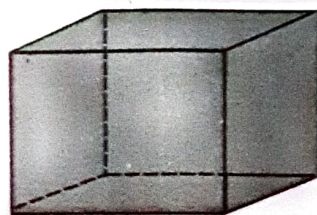
इन्हें कीजिए और सोचकर निष्कर्ष निकालिए :

घनाभ के चित्र को ध्यान से देखें और बतायें कि इसके शीर्ष (Vertex), कोर (Edge) और फलक (face) की संख्या कितनी है।

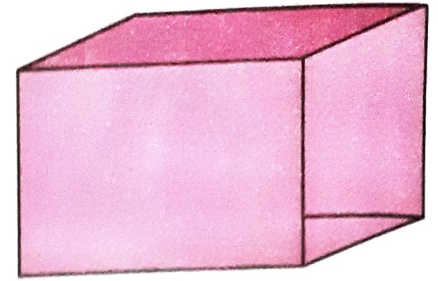
हम चित्र में देख रहे हैं कि घनाभ में शीर्षों की संख्या 8, कोरों की संख्या 12 और फलकों की संख्या 6 है। शीर्ष को V, कोर को E तथा फलक को F द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

प्रयास कीजिए

चित्र में दर्शाए गये घन, प्रिज्म और पिरामिड के शीर्ष, फलक और कोरों की गणना कीजिए

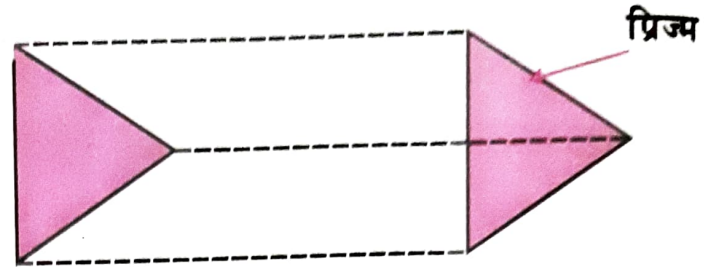


हमने देखा कि घन या घनाभ के आकार वाली वस्तुओं में 6 फलक, 8 शीर्ष तथा 12 कोरें हैं।



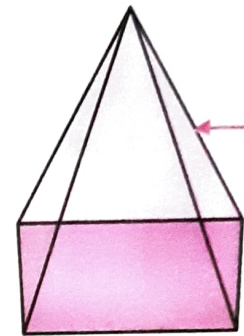
घनाभ

चित्र से स्पष्ट है कि निम्नांकित प्रिज्म में दो त्रिभुजाकार एवं तीन आयताकार फलक हैं। अतः इसमें 5 फलक, 6 शीर्ष तथा 9 कोरें हैं



प्रिज्म

चित्र में हम देख रहे हैं कि पिरामिड में 4 त्रिभुजाकार एवं एक आयताकार फलक है। इस प्रकार इसमें 5 फलक, 5 शीर्ष तथा 8 कोरे हैं।



पिरामिड

इन्हें कीजिए

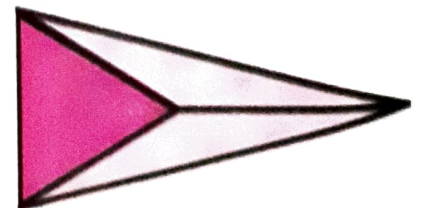
उपर्युक्त घनाभ, प्रिज्म एवं पिरामिड के फलक, शीर्ष और कोरों की संख्याओं की सारणी बनाकर निष्कर्ष निकालिए

नाम	शीर्षों की संख्या (V)	फलकों की संख्या (F)	कोरों की संख्या (E)
घनाभ	8	6	12
प्रिज्म	6	5	9
पिरामिड	5	5	8

उपर्युक्त सारणी से हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में शीर्षों और फलकों का योग कोरों की संख्या से 2 अधिक है। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $V + F = E + 2$ । इसे आयलर (Euler) का सूत्र कहते हैं

ध्यान दें,

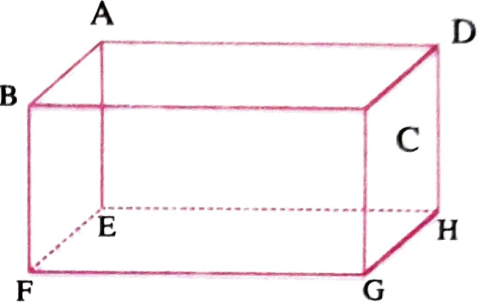
यदि पिरामिड का आधार एक त्रिभुज हो तो इस प्रकार के पिरामिड को चतुष्फलक कहते हैं, क्योंकि इसमें चार फलक होते हैं। पिरामिड का आधार कोई भी बहुभुज हो सकता है।



घनाभ, घन, प्रिज्म तथा पिरामिड प्रत्येक के लिए $V + F = E + 2$ सम्बन्ध सत्य है।

अभ्यास 16 (a)

- निम्नलिखित वस्तुओं में घनाभ के आकार की वस्तुओं को पहचानिए:
 - गेंद
 - सन्दूक
 - सड़क पर गिट्टी कूटने वाला रोलर
 - कीप
 - आलमारी
 - पुस्तक
 - ईंट
- पार्श्व चित्र में शीर्ष E पर मिलने वाली कोरों के नाम लिखिए।
 - पार्श्व चित्र में फलक ABCD के समान्तर फलक का नाम बताइए।
- घनाकार लूडो के पासे में फलकों, कोरों और शीर्षों की संख्या बताइए। क्या इसके लिए $V + F = E + 2$ सम्बन्ध सत्य है।
- लूडो के पासे के आमने- सामने के फलकों पर अंकित बिन्दुओं की संख्या का योग लिखें।



16.3 आयतन की अवधारणा

किसी भी वस्तु के द्वारा घरे गये कुल स्थान की माप जिस भौतिक राशि के द्वारा की जाती है, उसे उस वस्तु का आयतन कहते हैं।

जिस प्रकार लम्बाई की इकाई सेमी या मीटर, क्षेत्रफल की इकाई वर्ग सेमी या वर्ग मीटर होती है, उसी प्रकार आयतन का मात्रक घन सेमी या घन मीटर होता है।

एक ऐसा घन जिसकी प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी है, तो उस घन द्वारा घरे गये कुल स्थान की माप 1 घन सेमी आयतन के रूप में व्यक्त की जाती है।

अर्थात् 1 घन सेमी आयतन, ऐसे घन का आयतन होता है, जिसकी प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी होती है।

प्रयास करें

1 घन मीटर आयतन का क्या अर्थ है ?

विशेष :

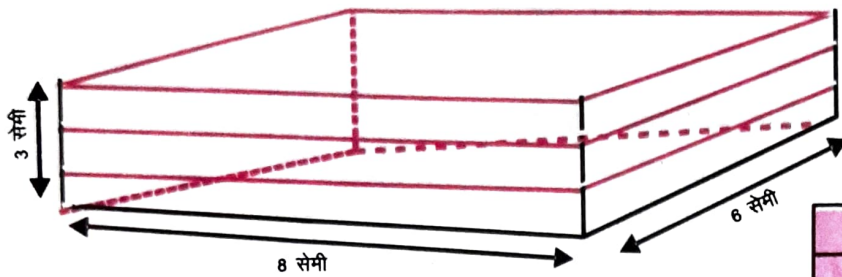
$$\begin{aligned}
 1 \text{ घन मीटर} &= 1 \text{ मी} \times 1 \text{ मी} \times 1 \text{ मी} \\
 &= 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} \\
 &= 1000000 \text{ घन सेमी} = 10^6 \text{ घन सेमी}
 \end{aligned}$$

घन सेमी को सेमी^3 भी लिखा जाता है, इसी प्रकार घन मीटर को मी^3 भी लिखा जाता है।

16.4 घनाभ एवं घन का आयतन (सूत्र की सहायता से)

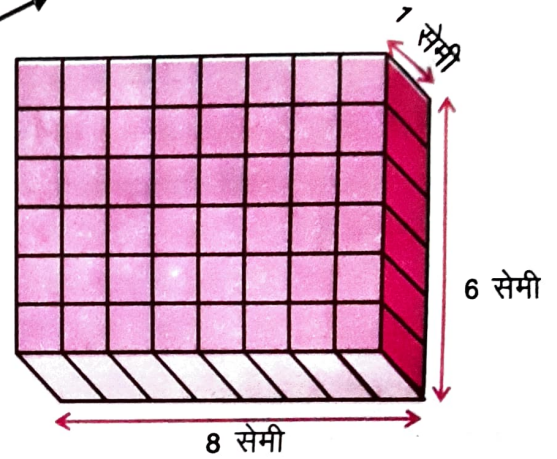
इन्हें सोचिए, तर्क कीजिए तथा निष्कर्ष निकालिए :

8 सेमी लम्बे, 6 सेमी चौड़े तथा 3 सेमी ऊँचे घनाभाकार साबुन के टुकड़े का आयतन ज्ञात करना। एक घनाभ के आकार के साबुन का टुकड़ा लीजिए, जिसकी लम्बाई 8 सेमी, चौड़ाई 6 सेमी व ऊँचाई 3 सेमी है। इसकी ऊँचाई को 3 बराबर भागों में बाँटिए। इनको किसी तेज चाकू से चित्रानुसार काटकर तीन एक समान पट्टियों में अलग कीजिए।



क्रिया कलाप :

अब किसी पट्टी की लम्बाई को 8 समान भागों में बाँटकर पट्टियाँ प्राप्त कीजिए। इन आठ पट्टियों में प्रत्येक पट्टी को 6 समान भागों में बाँटिए। इस प्रकार प्राप्त घन सेमी के टुकड़ों को गिनिए।



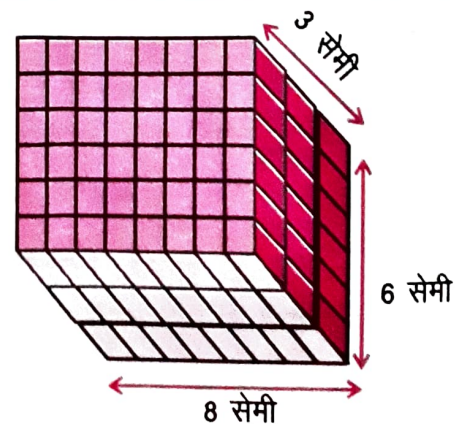
प्रयास करें :

1. एक पट्टी में कुल कितने टुकड़े प्राप्त हुए ?
2. प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई कितनी-कितनी है ?
3. क्या प्रत्येक टुकड़े का आयतन घन के रूप में है ?
4. साबुन के काटने पर कितनी पट्टियाँ प्राप्त होंगी ?

हम देखेंगे कि कुल प्राप्त टुकड़े 48 हैं तथा प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई 1 सेमी है तथा प्रत्येक टुकड़ा घनाकार होगा।

क्या आप बता सकते हैं :

एक पट्टी का आयतन 1 सेमी कोर वाले कितने घनों के आयतन के बराबर होगा। एक पट्टी का आयतन कुल प्राप्त 48 घनाकार टुकड़ों के बराबर होगा अर्थात् एक पट्टी का आयतन 48 घन सेमी के बराबर होगा।



यदि प्राप्त तीनों पट्टियों को एक दूसरे के ऊपर रखें तो हमें पुनः साबुन का टुकड़ा पार्श्व में प्रदर्शित प्रकार का प्राप्त होगा।

इस प्रकार :

$$\begin{aligned}
 \text{साबुन का आयतन} &= 3 \times \text{एक पट्टी का आयतन} \\
 &= 3 \times 48 \text{ घन सेमी} \\
 &= 3 \times (6 \times 8) \text{ घन सेमी} \\
 &= 8 \times 6 \times 3 \text{ घन सेमी} \\
 &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}
 \end{aligned}$$

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

$$\begin{aligned}
 \text{घनाभ का आयतन} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} \\
 &= l \times b \times h
 \end{aligned}$$

जहाँ $l = \text{लम्बाई}$, $b = \text{चौड़ाई}$ $h = \text{ऊँचाई}$

उपर्युक्त सूत्र की सहायता से साबुन या किसी घनाभ का आयतन उसे बिना काटे हुए प्राप्त किया जा सकता है।

अतः लिये गये साबुन के टुकड़े का आयतन $= 8 \times 6 \times 3 \text{ घन सेमी} = 144 \text{ घन सेमी}$

घन के आयतन का सूत्र :

हम जानते हैं कि घन एक ऐसा घनाभ है, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई परस्पर समान होती है। अतः घनाभ के आयतन के सूत्र में l , b तथा h के स्थान पर घन की कोर (भुजा) a को प्रतिस्थापित करके घन के आयतन को ज्ञात करने का सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि :

$$\text{घन का आयतन} = a \times a \times a = a^3$$

जहाँ $a = \text{घन की एक भुजा}$

उदाहरण 1 : एक घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी लम्बाई 5.5 सेमी, चौड़ाई 3.5 सेमी तथा ऊँचाई 4.0 सेमी है।

हल :

$$\text{घनाभ की लम्बाई } l = 5.5 \text{ सेमी}$$

$$\text{घनाभ की चौड़ाई } b = 3.5 \text{ सेमी}$$

$$\text{घनाभ की ऊँचाई } h = 4.0 \text{ सेमी}$$

$$\text{घनाभ का आयतन} = l \times b \times h$$

$$\therefore \text{घनाभ का आयतन} = 5.5 \times 3.5 \times 4.0 \text{ घन सेमी}$$

$$= 77 \text{ घन सेमी}$$

$$\text{घनाभ का आयतन} = 77 \text{ घन सेमी}$$

उदाहरण 2 : एक घन की प्रत्येक कोर 6 मी है। इस घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : घन की प्रत्येक कोर (a) = 6 मी

$$\text{घन का आयतन} = a^3 \text{ घन मी}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{घन का आयतन} &= 6^3 \text{ घन मी} \\ &= 6 \times 6 \times 6 \text{ घन मी} \\ &= 216 \text{ घन मी} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{घन का आयतन} = 216 \text{ घन मी}$$

उदाहरण 3 : 8 मी लम्बी, 3.5 मी ऊँची एवं 20 सेमी मोटी दीवार का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{aligned} \text{यहाँ दीवार की लम्बाई } l &= 8 \text{ मी} \\ \text{दीवार की ऊँचाई } b &= 3.5 \text{ मी} \\ \text{दीवार की मोटाई } h &= 20 \text{ सेमी} = 0.20 \text{ मी} \end{aligned}$$

सूत्र

$$\begin{aligned} \text{दीवार का आयतन} &= l \times b \times h \\ &= 8 \times 3.5 \times 0.20 \text{ घन मी} \\ &= 5.600 \text{ घन मी} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{दीवार का आयतन} = 5.6 \text{ घन मी}$$

उदाहरण 4 : लकड़ी के घनाभ के आकार के एक टुकड़े की लम्बाई 64 सेमी, चौड़ाई 32 सेमी तथा ऊँचाई 48 सेमी है। इससे 16 सेमी लम्बाई, 8 सेमी चौड़ाई तथा 12 सेमी ऊँचाई वाले कितने गुटके बनाए जा सकते हैं ?

हल :

$$\begin{aligned} \text{लकड़ी के बड़े गुटके की लम्बाई} &= 64 \text{ सेमी} \\ \text{लकड़ी के बड़े गुटके की चौड़ाई} &= 32 \text{ सेमी} \\ \text{लकड़ी के बड़े गुटके की ऊँचाई} &= 48 \text{ सेमी} \\ \therefore \text{लकड़ी के बड़े गुटके का आयतन} &= 64 \times 32 \times 48 \text{ घन सेमी} \\ \text{इसी प्रकार छोटे गुटके का आयतन} &= 16 \times 8 \times 12 \text{ घन सेमी} \\ \therefore \text{लकड़ी के बड़े गुटके से बनने} \\ \text{वाले छोटे गुटकों की संख्या} &= \frac{\text{लकड़ी के बड़े गुटके का आयतन}}{\text{छोटे गुटके का आयतन}} \end{aligned}$$

$$= \frac{64 \times 32 \times 48 \text{ घन सेमी}}{16 \times 8 \times 12 \text{ घन सेमी}}$$

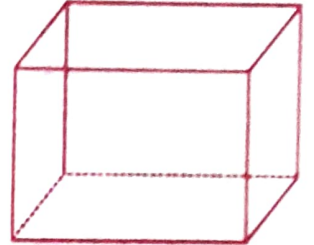
$$= 64$$

गुटकों की संख्या

इन्हें भी जानिए:

एक घनाकार बर्तन जिसकी कोर 10 सेमी अर्थात 1 डेसी मी है, उसका आयतन कितना होगा ?

$$\begin{aligned} \text{घनाकार बर्तन का आयतन} &= 10 \text{ सेमी} \times 10 \text{ सेमी} \times 10 \text{ सेमी} \\ &= 1000 \text{ सेमी}^3 \text{ (1 घन डेसी मी)} \\ &= 1 \text{ लीटर} \end{aligned}$$



इसी प्रकार

$$\begin{aligned} 1 \text{ घन मी} &= 1000000 \text{ घन सेमी} \\ &= 1000 \text{ लीटर} \end{aligned}$$

अभ्यास 16 (b)

- नीचे दी गई लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाले घनाभों के आयतन ज्ञात कीजिए।
 - लम्बाई = 8 सेमी, चौड़ाई = 5 सेमी तथा ऊँचाई = 4 सेमी
 - लम्बाई = 80 सेमी, चौड़ाई = 40 सेमी तथा ऊँचाई = 1 मी 20 सेमी
 - लम्बाई = 14 सेमी, चौड़ाई = 8.5 सेमी तथा ऊँचाई = 5 सेमी
 - लम्बाई = 1.4 सेमी, चौड़ाई = 0.5 सेमी तथा ऊँचाई = 0.4 मीटर
- नीचे दी गई भुजा की माप वाले घनों के आयतन ज्ञात कीजिए।
 - भुजा = 12 सेमी
 - भुजा = 6.4 सेमी
 - भुजा = 7.2 सेमी
 - भुजा = 1.3 सेमी
- एक कमरे की लम्बाई 5 मी, चौड़ाई 4 मी और ऊँचाई 3.5 मी है। कमरे का आयतन ज्ञात कीजिए।
- दो घनाकार वस्तुएं हैं जिनकी कोरें क्रमशः 2 सेमी और 4 सेमी हैं। इनके आयतन V_1 और V_2 में सम्बन्ध (अनुपात) ज्ञात कीजिए।
- एक मैदान की लम्बाई 40 मीटर तथा चौड़ाई 15 मीटर है। यदि इस मैदान पर 50 मिमी वर्षा हुई हो, तो ज्ञात कीजिए कि मैदान पर कुल कितने लीटर पानी गिरा, यदि 1 घन मी = 1000 लीटर।
- एक ईंट की लम्बाई, चौड़ाई व मोटाई क्रमशः 25 सेमी, 10 सेमी व 7.5 सेमी है। एक 5 मी लम्बी, 3.5 मी ऊँची व 33 सेमी मोटी दीवार को बनाने में कितनी ईंटें लगेंगी ?

7. एक घनाभाकार लकड़ी के टुकड़े का आयतन 264 घन सेमी है यदि टुकड़ा 8 सेमी लम्बा, 6 सेमी चौड़ा हो तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. लकड़ी के घनाभ के आकार के एक टुकड़े की लम्बाई 75 सेमी, चौड़ाई 15 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी है, तो इसमें से 15 सेमी लम्बे, 3 सेमी चौड़े तथा 1 सेमी ऊँचे कितने गुटके बनाये जा सकते हैं ?
9. भूमिगत जल संरक्षण हेतु वर्षा ऋतु में जल संग्रहण के लिए एक आवासीय परिसर में कच्ची जमीन पर 5 मी लम्बा, 3 मी चौड़ा तथा 1.5 मी गहरा गड्ढा खोदा गया है। बताइए उस गड्ढे में अधिकतम कितने लीटर पानी एकत्र किया जा सकता है ?
10. एक घनाभाकार पानी की टंकी की भीतरी मापें 5 मी, 4 मी तथा 3 मी है। टंकी का जल से $\frac{9}{10}$ भाग भरा है। इसके अन्दर के जल को प्रदूषण मुक्त एवं शुद्ध करने पर प्रति एक हजार लीटर पर ₹10 का खर्च आता है। बताइए कि टंकी के सम्पूर्ण जल को शुद्ध करने पर कुल कितना व्यय होगा।

प्रोजेक्ट :

एक घनाभ के आकार का चाय का डिब्बा लीजिए जिसकी लम्बाई = 15 सेमी, चौड़ाई = 9 सेमी तथा ऊँचाई = 6 सेमी हो। इसको खोलकर सभी फलकों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (i) डिब्बे के सभी फलकों (सम्पूर्ण पृष्ठ) का क्षेत्रफल कितना है ?
- (ii) यदि डिब्बे की लम्बाई = l सेमी, चौड़ाई = b सेमी और ऊँचाई = h सेमी, तो उसके सम्पूर्ण पृष्ठ का सूत्र ज्ञात कीजिए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. ठोस ज्यामितीय आकृतियों में प्रायः फलक को F से, शीर्ष को V से तथा कोरों को E से प्रदर्शित करते हैं।
2. घनाभ तथा घन प्रत्येक के लिए 6 फलकें, 8 शीर्ष तथा 12 कोरें होती हैं।
3. प्रिज्म (त्रिभुजाकार) के लिए 5 फलक, 6 शीर्ष तथा 9 कोरें होती हैं।
4. पिरामिड (आयताकार आधार का) के लिए 5 फलकें, 5 शीर्ष तथा 8 कोरें होती हैं।
5. घनाभ, घन, प्रिज्म तथा पिरामिड प्रत्येक के लिए $V + F = E + 2$ सम्बन्ध सत्य है।
6. किसी वस्तु द्वारा घेरे गये कुल स्थान की माप आयतन द्वारा की जाती है तथा इसका मात्रक घन इकाई (घन सेमी या घन मी आदि) होता है।
7. घनाभ का आयतन = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई
 $= l \times b \times h$ घन इकाई
जहाँ लम्बाई = l इकाई, चौड़ाई = b इकाई, ऊँचाई = h इकाई
8. घन का आयतन = भुजा $\times$ भुजा $\times$ भुजा
 $= a \times a \times a = a^3$ घन इकाई
जहाँ a = घन के एक कोर या भुजा की लम्बाई

अभ्यास 16 (a)

1. सन्दूक, आलमारी, पुस्तक, ईंट; 2. (i)EH, EA, EF; (ii) EFGH; 3. फलक 6, कोरे 12, शीर्ष 8, सत्य है; 4. 7

अभ्यास 16 (b)

1. (i)160 घन सेमी, (ii)384000 घन सेमी, (iii) 595 घन सेमी, (iv) 28 घन सेमी; 2. (i)1728 घन सेमी, (ii) 262.144 घन सेमी; (iii)373.248 घन सेमी, (iv) 2.197 घन सेमी; 3. 70 घन मी 4. 1:8; 5. 30000 लीटर, 6. 3080 ईंटें; 7. 5.5 सेमी; 8. 125 9. 22500 लीटर; 10. ₹ 540