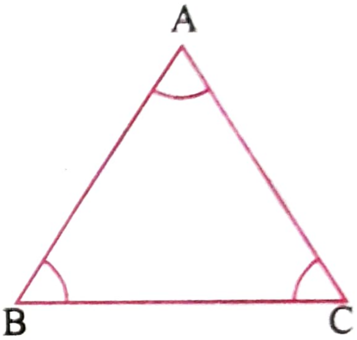
इकाई 13 त्रिभुज

ANZ1VP

- त्रिभुज के प्रकार
- त्रिभुज की रचना
- आकृतियों की सर्वांगसमता
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता
- आकृतियों की समरूपता
- त्रिभुजों की समरूपता

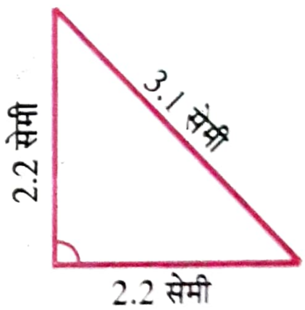
13.1 भूमिका :



आप अब तक ज्यामितीय अवधारणा के अन्तर्गत ठोस वस्तुओं के फलक और उनके फलकों के चारों ओर पेंसिल घुमाने से बनने वाले आयत, वर्ग, वृत्त, त्रिभुज, इत्यादि आकृतियों से अवगत हो चुके हैं। आइए, हम त्रिभुज के विषय में विस्तार से जानें।

13.2 त्रिभुज (Triangle):

जैसा कि आप चित्र में देख रहे हैं ABC एक त्रिभुज है जिसकी $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ तीन भुजाएँ, A,B,C तीन शीर्ष और $\angle BCA$, $\angle ABC$ और $\angle CAB$ तीन कोण हैं। अत: हम कह सकते हैं कि त्रिभुज, तीन रेखा खंडों से बनी एक बन्द सरल आकृति है, जिसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोण होते हैं। इसे चिह्न 'Δ' द्वारा दर्शाते हैं।

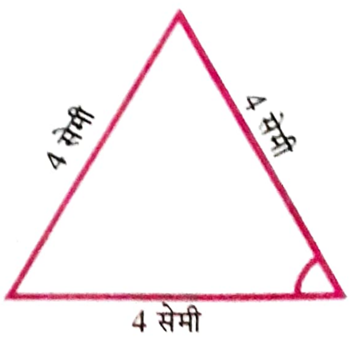


चित्र (i)

आप पार्श्व में बने हुए चित्रों को देखें और भुजाओं की लम्बाई के आधार पर इनका वर्गीकरण करें।

चित्र (i) में हम देखते हैं कि इस Δ की दो भुजाएँ बराबर हैं, परन्तु तीसरी भुजा की लम्बाई भिन्न है, इसलिए इस प्रकार के त्रिभुज को **समद्विबाहु त्रिभुज** कहते हैं।

चित्र (ii) को देखें और निष्कर्ष निकालें, इस त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर है, अत: इसे **समबाहु त्रिभुज** कहते हैं।

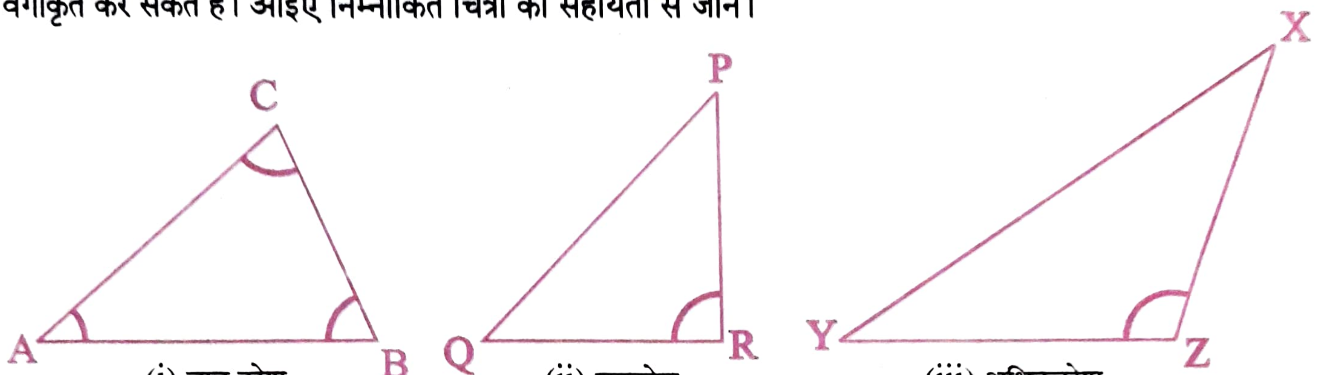


चित्र (ii)

चित्र (iii) पर विचार करें, इस त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई में कोई समानता नहीं हैं, इसलिए इस प्रकार के त्रिभुज को **विषमबाहु त्रिभुज** कहते हैं।

चित्र (iii)

यहाँ हमने देखा कि भुजाओं की लम्बाइयों के अनुसार त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं। आप कोण और इसके प्रकार के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। अब हम आगे देखेंगे कि कोण के आधार पर त्रिभुज को कितने प्रकार से वर्गीकृत कर सकते हैं। आइए निम्नांकित चित्रों की सहायता से जानें।



(i) न्यून कोण (ii) समकोण (iii) अधिककोण

चित्र (i) में Δ ABC का प्रत्येक कोण न्यून कोण है, इस प्रकार के त्रिभुज को **न्यून कोण त्रिभुज** कहते हैं।

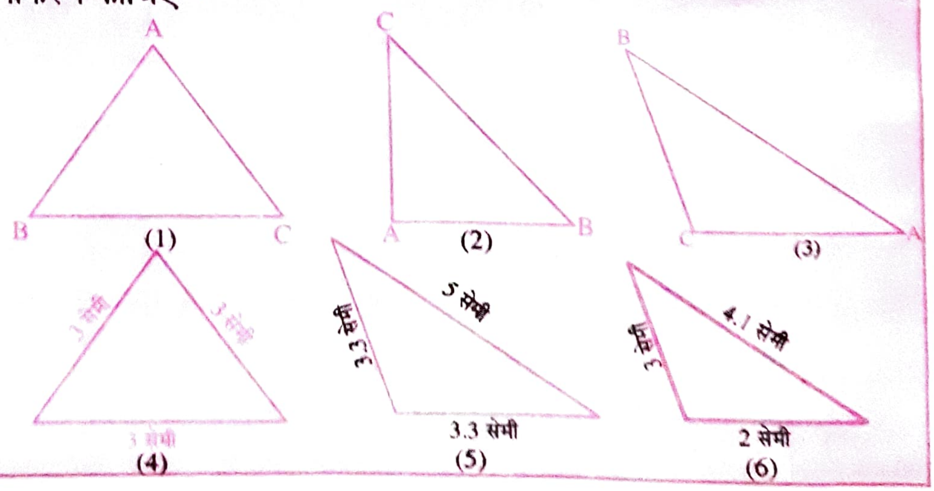
चित्र (ii) को देखें, इसमें ∠ QRP समकोण हैं, ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण है, **समकोण त्रिभुज** कहलाता है।

चित्र (iii) में ∠ XZY अधिक कोण है। अत: ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण अधिक कोण हो, **अधिक कोण त्रिभुज** कहलाता है।

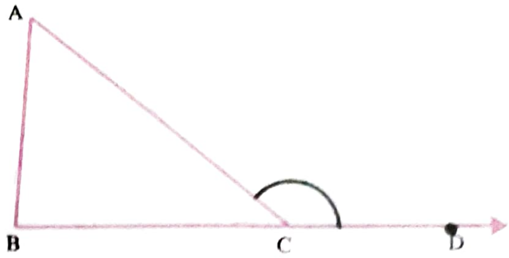
प्रयास कीजिए

1. (i) Δ ABC बनाकर इसके अवयवों के नाम लिखिए। (ii) ∠ A के सामने की भुजा को लिखिए। (iii) भुजा AC के सामने का कोण लिखिए।

2. त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए -



☛ **सोचिए एवं कीजिए :**



आइए अब हम Δ के अन्य कोणों के विषय में जाने । ΔABC की भुजा $\overline{BC}$ को बढ़ाकर शीर्ष C पर बने कोण ACD पर ध्यान दीजिए। यह कोण ΔABC के बर्हिभाग में स्थित है। इसे हम ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण (Exterior Angle) कहते हैं।

स्पष्ट है कि $\angle BCA$ तथा $\angle ACD$ परस्पर संलग्न कोण (Adjacent Angle) हैं। इसी प्रकार भुजा $\overline{CA}$ तथा $\overline{AB}$ को बढ़ाकर क्रमशः कोण A और B के बाह्य कोणों को बना सकते हैं।

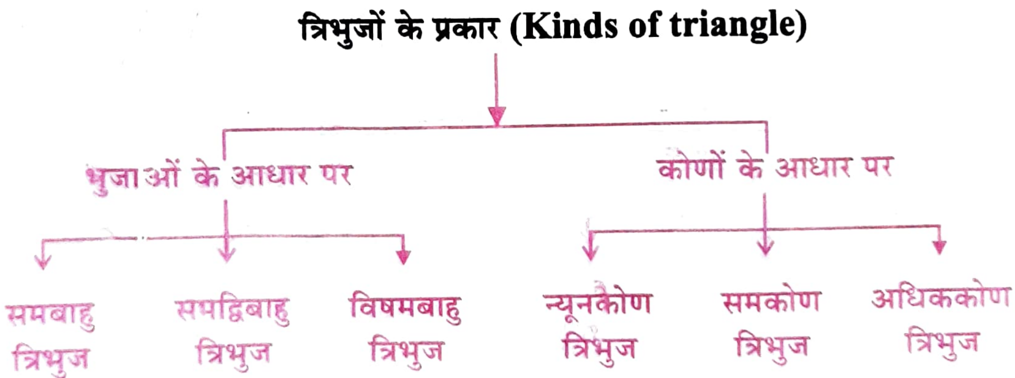
✌ **निष्कर्ष :**

भुजाओं की दृष्टि से त्रिभुजों के प्रकार -

- वह त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाएँ समान हैं, समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसकी केवल दो भुजाएं समान हैं, समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसकी कोई भुजाएँ समान नहीं हैं, विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle) कहलाता है।

कोणों की दृष्टि से त्रिभुजों के प्रकार -

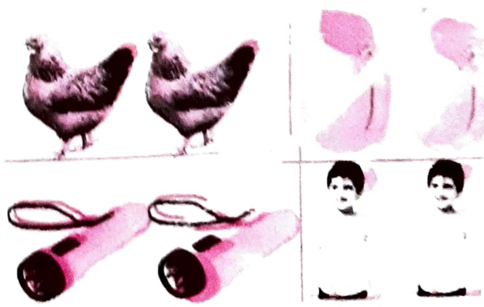
- वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण है, समकोण त्रिभुज (Right Triangle) कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसका एक कोण अधिक कोण है, अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse Triangle) कहलाता है।
- वह त्रिभुज, जिसका प्रत्येक कोण न्यून कोण है, न्यून कोण त्रिभुज (Acute Triangle) कहलाता है।



आपने विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों को देखा और बनाया है। इस इकाई में आप एक बहुत ही महत्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना सर्वांगसमता सीखने जा रहे हैं, जो विशेष कर त्रिभुजों की सर्वांगसमता से संबन्धित है।

सर्वांगसमता (Congruence) (तल - आकृतियों की सर्वांगसमता)

✍ **प्रयास कीजिए :**



- चित्रों को देखकर बताइए -

(i) कौन-कौन से चित्र परस्पर आकृति (रूप) में समान हैं ?

(ii) समान आकृति वाले चित्र क्या आकार (विस्तार) में भी परस्पर समान हैं ?

☛ इन्हें कीजिए :

पार्श्वांकित आकृतियों को देखिए :

1. अपनी एक हाथ की हथेली पर दूसरे हाथ की हथेली को इस प्रकार रखिए कि दोनों हाथ की हथेलियाँ एक दूसरे पर पूर्णत: आ जाएँ। क्या एक हथेली से दूसरी हथेली पूर्णत: ढक गई है ?

2. अपनी हथेली दूसरे सहपाठी की हथेली पर रखिए और देखिए कि एक हथेली दूसरे की हथेली से पूर्णत: ढकती है या नहीं।

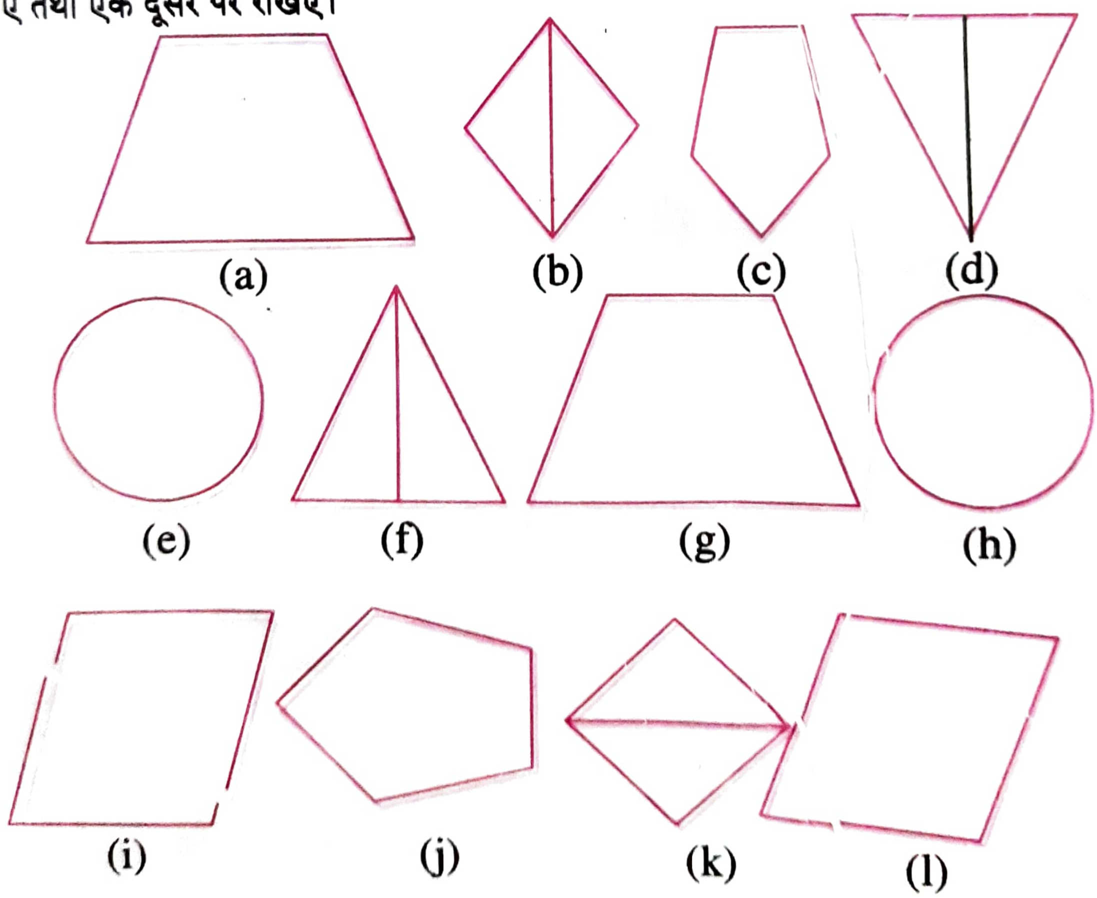
हमने देखा कि अपने एक हाथ की हथेली से दूसरे हाथ की हथेली पूर्णत: ढँक जाती है, जबकि एक शिक्षार्थी की हथेली से दूसरे शिक्षार्थी की हथेली पूर्णत: नहीं ढकती है। इसका क्या कारण है ?

एक ही शिक्षार्थी की दोनों हथेलियों की आकृतियाँ (रूप) एवं आकार समान होते हैं। इसलिए वे एक दूसरे को पूर्णत: ढक पाती है।

दो शिक्षार्थियों की हथेलियाँ आकृति में समान होती हैं, परन्तु उनके आकार भिन्न-भिन्न होते है। इसलिए वे एक दूसरे को पूर्णत: नहीं ढक पाती हैं।

☛ इन्हें कीजिए :

- निम्नलिखित चित्रों को ध्यान से देखिए और इन्हें ट्रेसिंग पेपर पर बनाइए और प्रत्येक चित्र को काटकर अलग कीजिए तथा एक दूसरे पर रखिए।



हम देखते हैं कि चित्र (a) और चित्र (g) आकृति और आकार में समान हैं। अत: चित्र (a), चित्र (g) पर रखने पर उसे पूर्णत: ढँक लेता है। इसी प्रकार चित्र (e), चित्र (h) को तथा चित्र (d), चित्र (f) को पूर्णत: ढक लेते हैं। चित्र (c) और चित्र (j) दोनों समान लगते हैं, परन्तु वे एक दूसरे को पूर्णत: नहीं ढक सकते हैं। इसी प्रकार चित्र (b) चित्र (k) को और चित्र (i), चित्र (*l*) को पूर्णत: नहीं ढकते हैं।

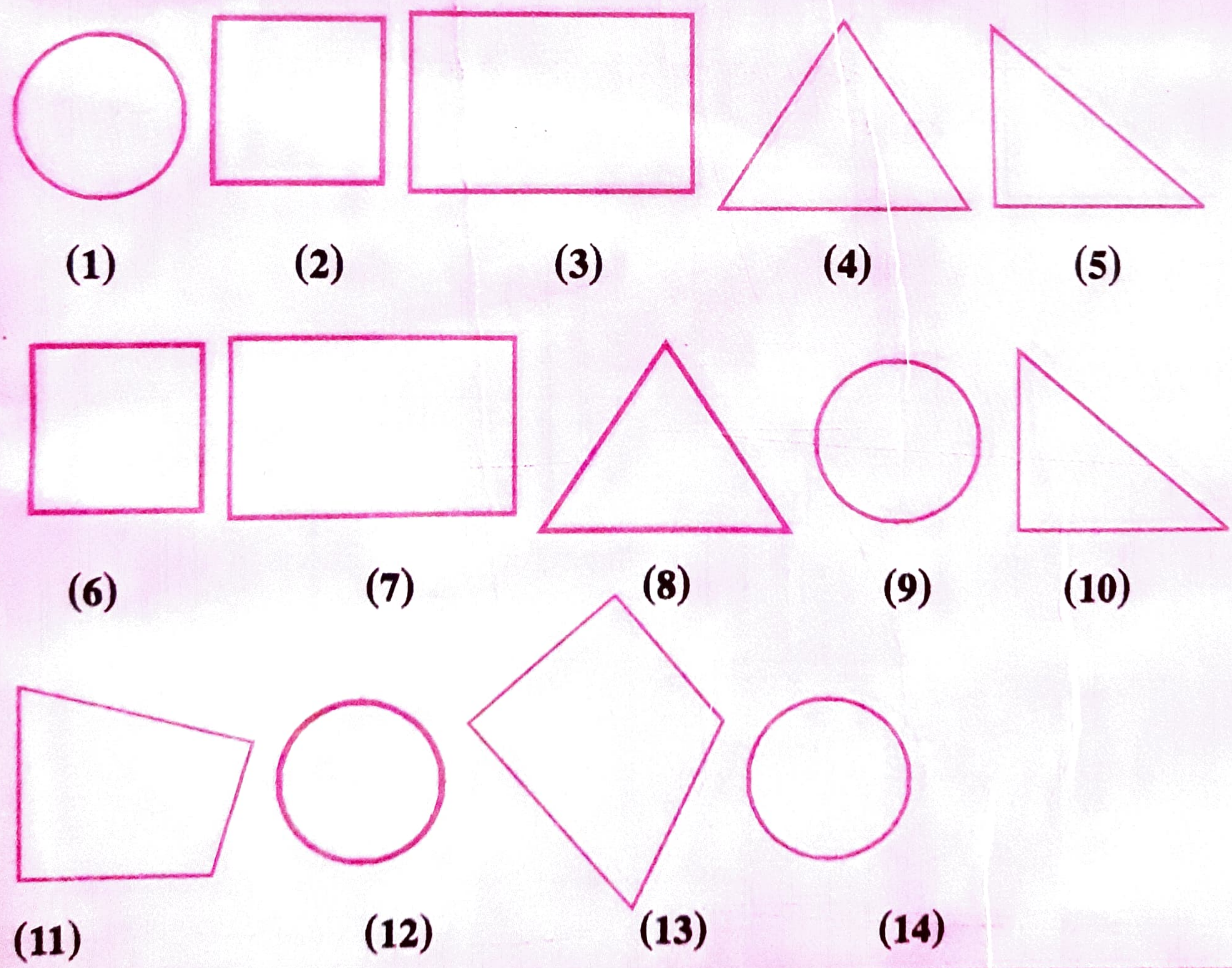
- जब दो आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णत: ढक लेती हैं, तो उन आकृतियों को सर्वांगसम कहते हैं।
- चिह्न "≅" को सर्वांगसम (Congruent) पढ़ते हैं।

ध्यान दें

(i) दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी लम्बाई समान है।
(ii) यदि दो कोणों के माप समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।
(iii) दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ समान हों।
(iv) वे आकृतियाँ जो आकार (shape) और माप (Size) में समान होती हैं, सर्वांगसम होती हैं।

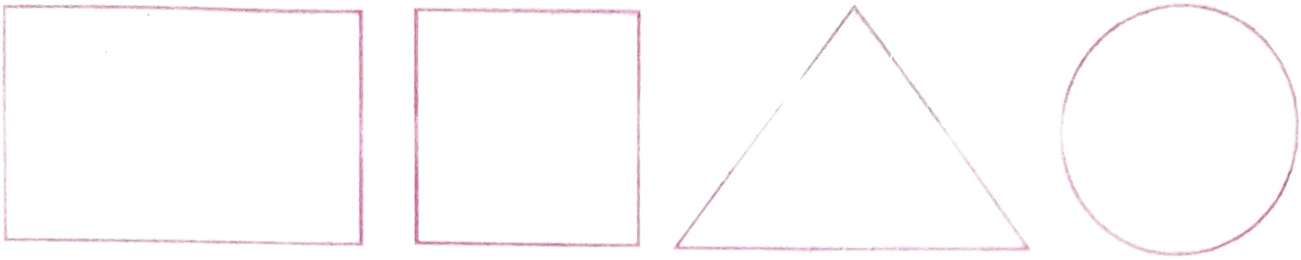
प्रयास कीजिए

कुछ आकृतियों के क्रमांक दिये गये हैं। सर्वांगसम आकृतियों के क्रमांक छाँटकर एक साथ लिखिए:

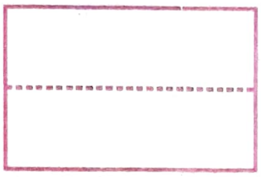
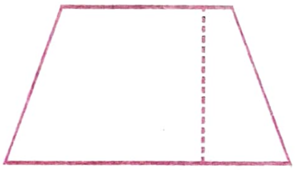
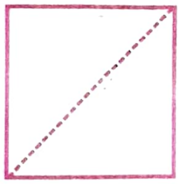
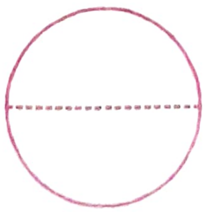
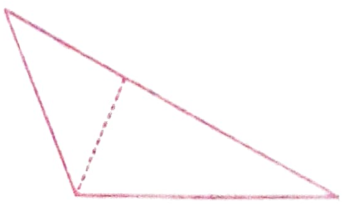


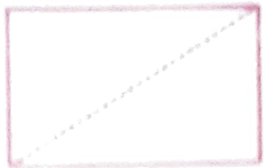
अभ्यास 13 (a)

1. निम्नांकित चित्रों को काटिए, प्रत्येक को दो भागों में इस प्रकार मोड़िए कि दोनों भाग सर्वांगसम हो जाएं।

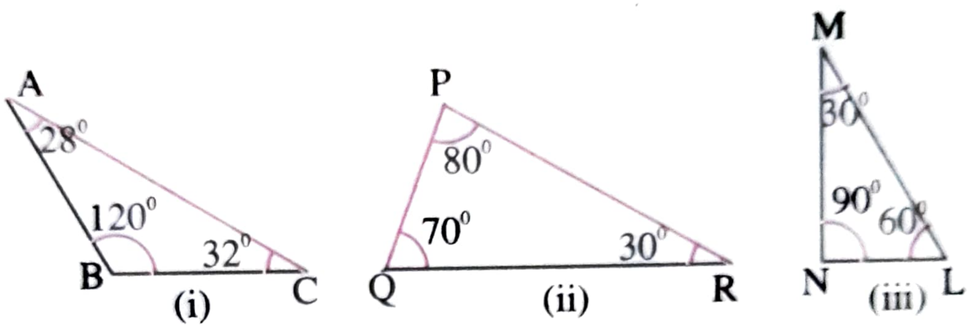


2. नीचे बने चित्रों को यदि बिन्दुदार रेखाओं पर दो भागों में मोड़ा जाए, तो प्रत्येक के दोनों भाग सर्वांगसम हैं या नहीं? अपनी अभ्यास पुस्तिका में प्रत्येक के समक्ष हाँ या नहीं में उत्तर लिखिए -

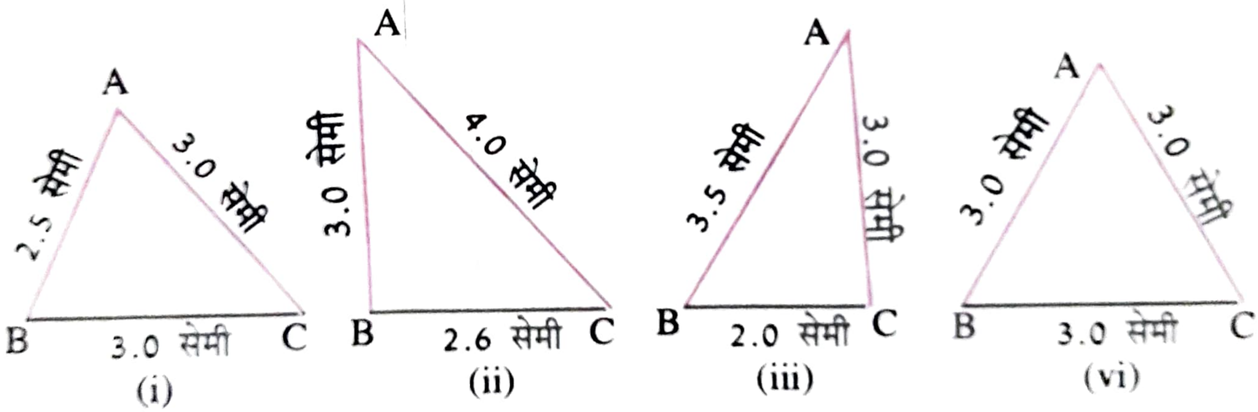
क्रमांक	चित्र	हाँ/नहीं
(i)		
(ii)		
(iii)		
(iv)		
(v)		

(vi)		
(vii)		

3. निम्नलिखित त्रिभुजों को उनके कोणों के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।



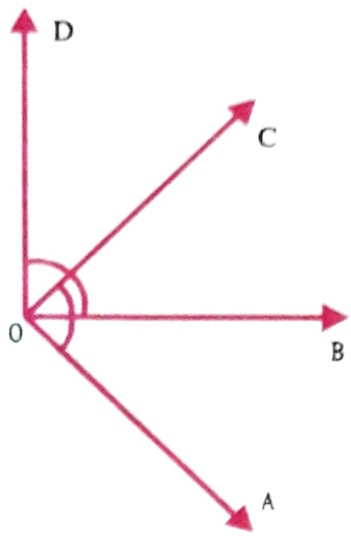
4. निम्नलिखित त्रिभुजों को उनके भुजाओं के आधार पर वर्गीकृत कीजिए।



5. नीचे दो रेखाखंड दिये गये हैं, दोनों रेखाखंड सर्वांगसम हैं। यदि AB = 4.5 सेमी, तो CD की लम्बाई कितनी होगी?

6. चित्र में A, B, C, D एक रेखा पर स्थित बिन्दु हैं। रेखाखंड CA = रेखाखंड BD , तो रेखाखंड CB और AD बराबर हैं या नहीं ?

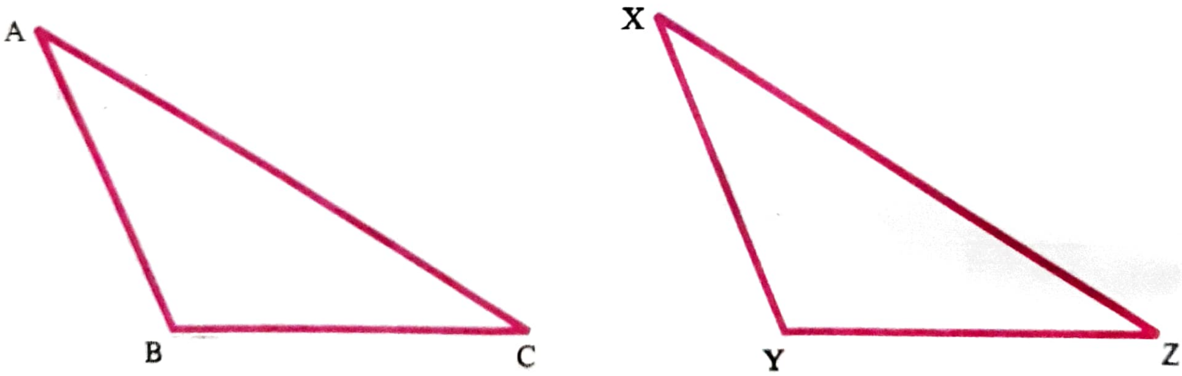
7. नीचे बने चित्र में ∠ AOB = ∠ COD, तो क्या ∠ AOC = ∠ BOD ?



13.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of tringles)

☛ इन्हें कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक त्रिभुज ABC बनाइए। ट्रेसिंग पेपर पर इसी त्रिभुज की दूसरी अनुकृति Δ XYZ बनाइए। इसे कैंची से काटकर Δ ABC पर रखिए, और देखिए कि क्या वे एक दूसरे को ढक लेते हैं ? इस स्थिति में ∠A = ∠X, ∠B = ∠Y, ∠C = ∠Z, भुजा AB = भुजा XY, भुजा BC = भुजा YZ तथा भुजा AC = भुजा XZ



हमने देखा कि दोनों त्रिभुज आकृति (रूप) और आकार (विस्तार) में समान हैं। ये त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम हैं।

- यदि दो त्रिभुज आकृति और आकार में समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।
- यदि Δ ABC और Δ XYZ सर्वांगसम हैं तो उन्हें Δ ABC ≅ Δ XYZ लिखते हैं।
- वे शीर्ष, कोण और भुजाएँ जो एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लेती हैं, क्रमशः संगत शीर्ष, संगत कोण और संगत भुजाएँ कहलाती हैं।

  उपर्युक्त Δ ABC और Δ XYZ में संगत शीर्ष, संगत कोण और संगत भुजा बताइए।

शीर्ष A का संगत शीर्ष X है, इसे $(A \leftrightarrow X)$ लिखते हैं।
शीर्ष B का संगत शीर्ष Y है, इसे $(B \leftrightarrow Y)$ लिखते हैं।
शीर्ष C का संगत शीर्ष Z है, इसे $(C \leftrightarrow Z)$ लिखते हैं।
$\angle A$ का संगत कोण $\angle X$ है।
$\angle B$ का संगत कोण $\angle Y$ है।
$\angle C$ का संगत कोण $\angle Z$ है।
भुजा AB की संगत भुजा XY है, इसे $(AB \leftrightarrow XY)$ लिखते हैं।
भुजा BC की संगत भुजा YZ है , इसे $(BC \leftrightarrow YZ)$ लिखते हैं।
भुजा AC की संगत भुजा XZ है, इसे $(AC \leftrightarrow XZ)$ लिखते हैं।

हमने देखा :

यदि $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ तो उनके संगत कोण और संगत भुजाएं बराबर हैं।

एक चित्र को काटकर दूसरे चित्र पर रखने की विधि को अध्यारोपण (Superposition) कहते हैं। इस विधि से दो दिये गये चित्रों की सर्वांगसमता की जांच कर सकते हैं।

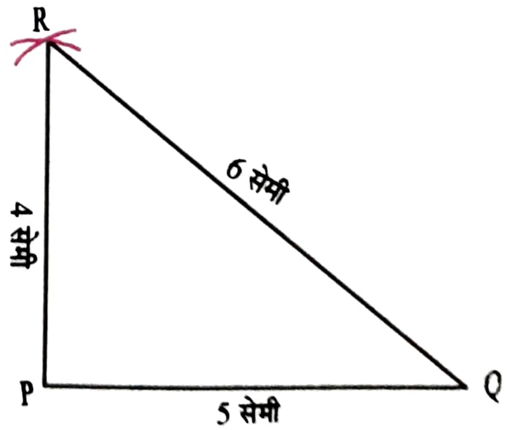
हम इस इकाई में Δ और इसके अंगों के विषय में जान चुके हैं।

त्रिभुज की रचना जबकि तीनों भुजाएँ दी हुयी हों (SSS) :

एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जिसकी भुजा PQ = 5 सेमी, QR = 6 सेमी, RP = 4 सेमी।

रचना :

- रेखाखण्ड PQ = 5 सेमी खींचिए।
- परकार की सुई की नोक को भुजा PQ के बिन्दु Q पर रखकर 6 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाइए।
- इसी प्रकार RP = 4 सेमी के बराबर परकार से लम्बाई लीजिए।
- परकार की सुई की नोक को भुजा PQ के बिन्दु P पर रखकर एक चाप लगाइए।
- दोनों चाप एक दूसरे को जहाँ पर काटते हैं उसे बिन्दु R अंकित कीजिए।
- बिन्दु R को बिन्दु Q से और बिन्दु P से मिलाइए। यही अभीष्ट त्रिभुज PQR है।



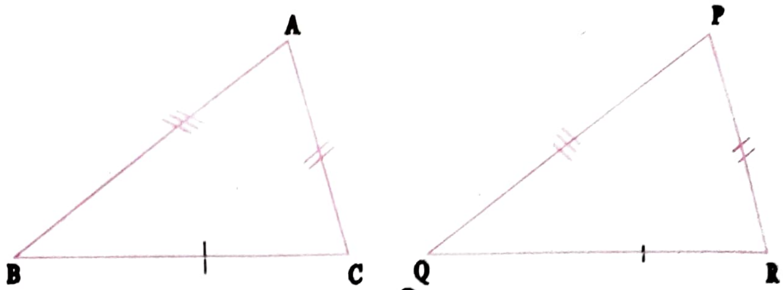
सर्वांगसमता की जाँच

क्रिया कलाप :

- त्रिभुज PQR के ऊपर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा त्रिभुज ABC बनाइए। दोनों त्रिभुजों Δ PQR और Δ ABC को काटकर एक दूसरे पर रखिए और देखिए कि वे एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढँक लेते है या नहीं। त्रिभुज ABC की

भुजाएँ नापिए और देखिए कि दोनों त्रिभुजों की भुजाओं में क्या सम्बन्ध है।

- कागज के एक पन्ने पर त्रिभुज Δ ABCबनाइए जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 6.0 सेमी, और CA = 3 सेमी।
- दूसरा त्रिभुज Δ PQR बनाइए जिसमें PQ = 5 सेमी, QR = 6.0 सेमी और RP = 3 सेमी।
- इन दोनों त्रिभुजों को काटकर अलग कीजिए।



(SSS) चित्र

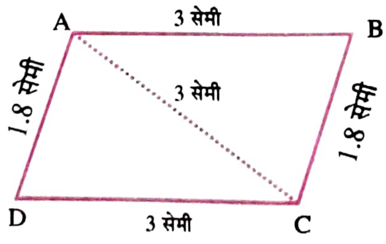
- एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर इस प्रकार रखिए कि भुजा AB भुजा PQ पर, भुजा BC भुजा QR पर और भुजा AC भुजा RP पर पड़े।
- क्या एक त्रिभुज ने दूसरे त्रिभुज को पूरा ढक लिया ?

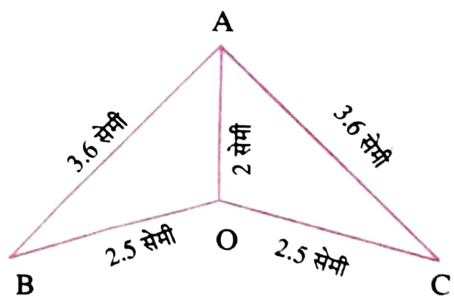
यदि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरा-पूरा ढक लेते हैं, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

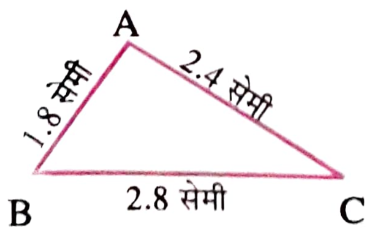
यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता अथवा संक्षेप में भु0 भु0 भु0 सर्वांगसमता कहते हैं।

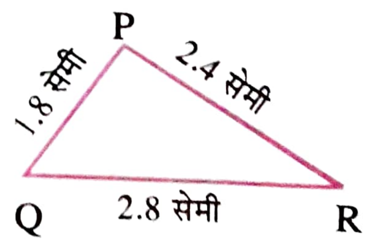
अभ्यास 13 (b)

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जबकि AB = 6सेमी, BC = 8 सेमी तथा AC = 4 सेमी।
2. निम्नांकित त्रिभुजों के जोड़े में भुजाओं के नाप अंकित हैं। भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता प्रतिबन्ध का प्रयोग करके बताइए, कौन त्रिभुज किस त्रिभुज के सर्वांगसम है, उत्तर को सांकेतिक भाषा में लिखिए।





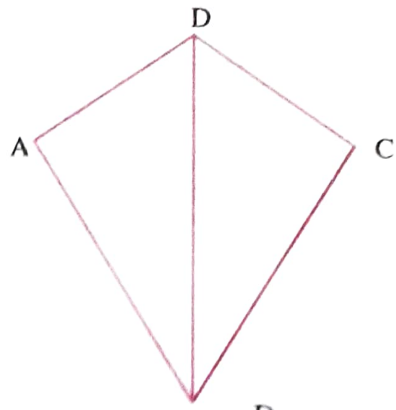




3. पार्श्वांकित चित्र में AD = DC और AB = BC

(i) क्या Δ ABD $\cong$ Δ CBD ?

(ii) यदि Δ ABD $\cong$ ΔCBD, तो इसके संगत भुजाओं और संगत कोणों को लिखिए।

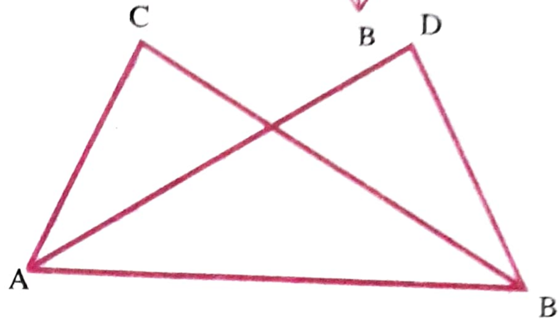


4. पार्श्वांकित चित्र में, ΔABC और ΔABD, एक ही भुजा AB पर बने त्रिभुज हैं। AC = BD तथा BC = AD हैं। निम्नांकित कथन में कौन सत्य/असत्य हैं ?

(i) Δ ABC $\cong$ Δ ABD

(ii) Δ ABC $\cong$ Δ ADB

(iii) Δ ABC $\cong$ Δ BAD

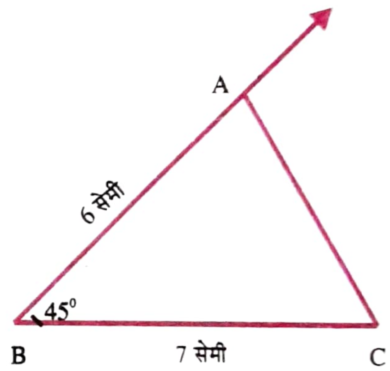


13.5 त्रिभुज की रचना जब कि दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण ज्ञात हों : (SAS)

एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसकी भुजा AB = 6 सेमी, भुजा BC = 7 सेमी और $\angle B = 45^\circ$

रचना :

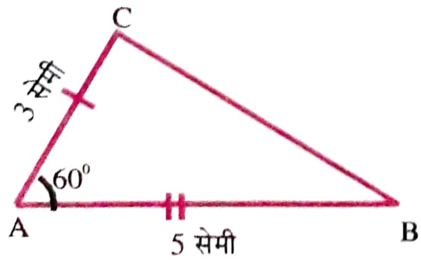
- 7 सेमी लम्बाई का रेखाखंड BC खींचिए।
- बिन्दु B पर चाँदा की सहायता से 45° का कोण बनाती हुई एक किरण खींचिए।
- इस किरण पर बिन्दु B से 6 सेमी की दूरी पर बिन्दु A पर चिह्न लगाइए।
- बिन्दु A और C को मिलाइए यही Δ ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

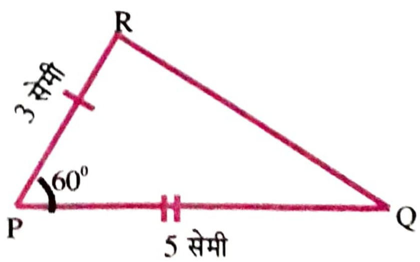


सर्वांगसमता की जाँच

इस Δ ABC पर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा ΔPQR बनाइए। Δ PQR को काटकर Δ ABC पर रखिए और देखिए कि दोनों एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लेते हैं या नहीं। दूसरे त्रिभुज PQR की भुजाएँ और उनके बीच का कोण नापिए तथा देखिए कि दोनों त्रिभुजों की भुजाओं और बीच के कोण में क्या सम्बन्ध है ?

- एक Δ ABC बनाइए जिसमें AC = 3.0 सेमी, AB = 5.0 सेमी, और $\angle$ A= 60°
- दूसरा त्रिभुज Δ PQR भी बनाइए जिसमें PQ = 5 सेमी, PR = 3 सेमी, और $\angle P = 60^\circ$
- इन त्रिभुजों को काटिए और एक दूसरे पर रखिए। क्या दोनों त्रिभुजों ने एक-दूसरे को ढक लिया है ? यदि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णत: ढक लेते हैं, तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

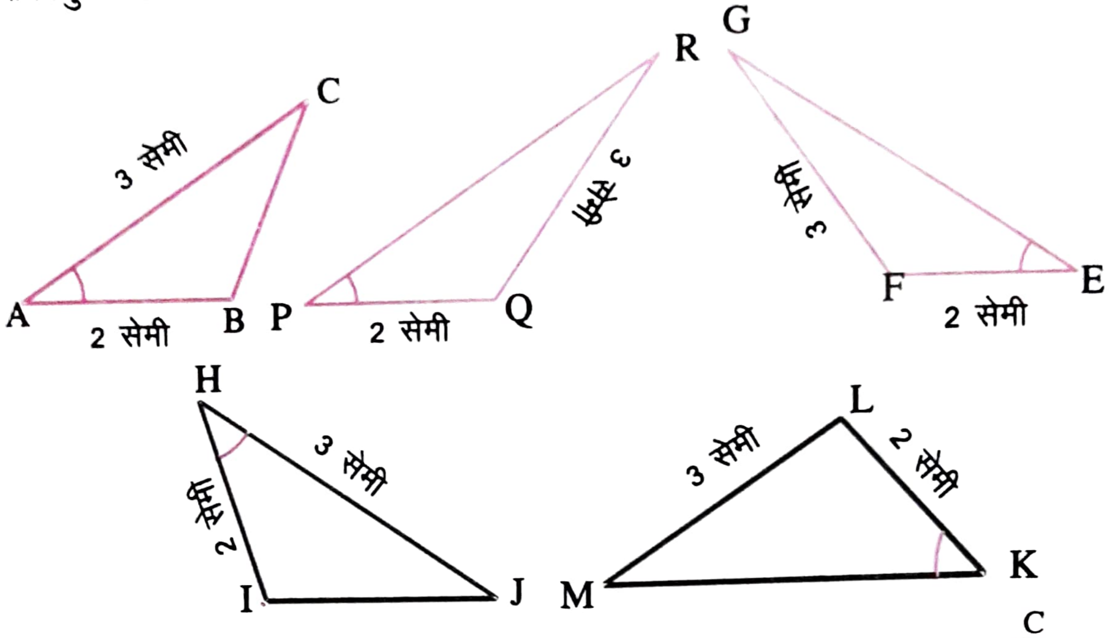




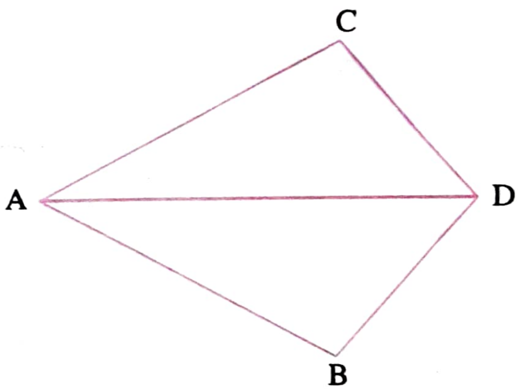
यदि दो त्रिभुजों की दो संगत भुजाएँ और उनके बीच के कोण समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता ''भु0 को0 भु0'' सर्वांगसमता कहते हैं।

अभ्यास 13 (C)

1. चित्र में दो त्रिभुज आपस में सर्वांगसम है, उन्हें छाँट कर सांकेतिक भाषा में लिखिए :



2. एक त्रिभुज Δ ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 6 सेमी, AC= 6 सेमी और ∠ A= 90°, त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए जिसमें XY = 6 सेमी ∠ X = 90° और ∠ Y = 45°, क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?



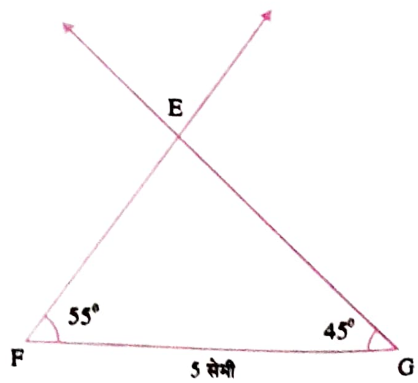
3. पार्श्वांकित चित्र में AB = AC और ∠ DAB = ∠ CAD तो क्या Δ ABD और Δ ADC सर्वांगसम हैं ? यदि हैं तो क्यों ?

4. त्रिभुज Δ ABC की रचना कीजिये जबकि AC = 4.5 सेमी, BC = 6 सेमी तथा ∠C = 60°।

13.6 त्रिभुज की रचना जबकि दो कोण और संगत भुजा ज्ञात हों (ASA)

Δ EFG की रचना कीजिए जिसमें FG = 5 सेमी, ∠ F = 55° और ∠ G = 45° हो ।

रचना :

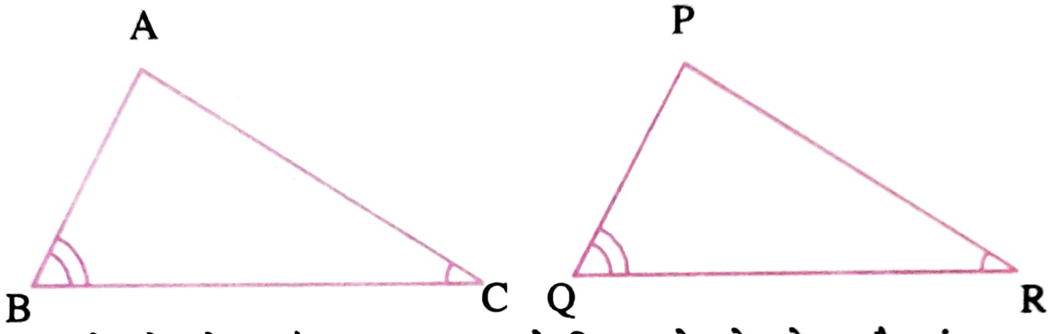


- 5 सेमी लम्बाई का रेखाखंड FG खीचिए।
- बिन्दु F पर चाँदे की सहायता से 55° का कोण बनाती हुई एक किरण खीचिए।
- बिन्दु G से 45° का कोण बनाती हुए दूसरी किरण खीचिए।
- दोनों किरण एक दूसरे को बिन्दु E पर काटती हैं।
- Δ EFG अभीष्ट त्रिभुज है।

सर्वांगसमता की जाँच :
क्रिया कलाप :

Δ EFG पर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा Δ ABC बनाइए। Δ ABC को काटकर Δ EFG पर रखिए, और देखिए कि क्या दोनों त्रिभुजों ने एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लिया है ? दूसरे त्रिभुज ABC की भुजा BC तथा ∠B और ∠C को नापिए और देखिए कि दोनों त्रिभुजों की भुजा FG और BC, कोणों ∠F और ∠B तथा ∠G और ∠C में क्या सम्बन्ध है ?

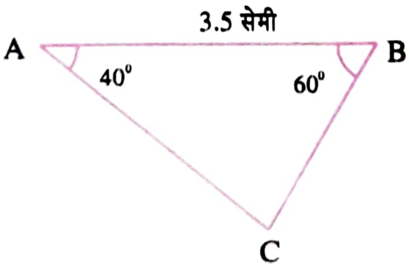
- एक Δ ABC बनाइए जिसकी भुजा BC = 5.0 सेमी ∠B = 45°. ∠C = 30°, एक दूसरा Δ PQR बनाइए, जिसकी भुजा QR= 5 सेमी, ∠Q = 45°, ∠R = 30°, Δ ABC को काटकर Δ PQR पर रखिए। यदि त्रिभुज Δ ABC ने Δ PQR को पूरा - पूरा ढक लिया तो Δ ABC और Δ PQR त्रिभुज सर्वांगसम हैं। अर्थात Δ ABC ≅ Δ PQR

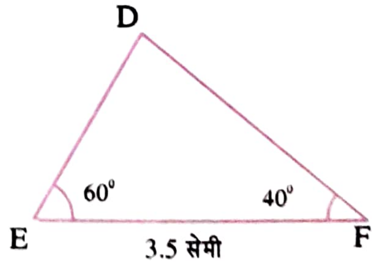


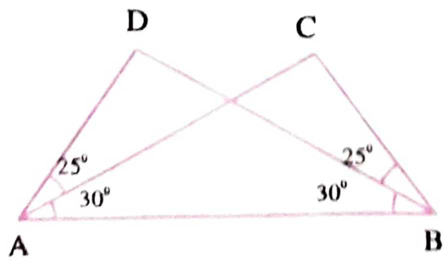
यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे को0 भु0 को0 (A.S.A.)सर्वांगसमता कहते हैं।

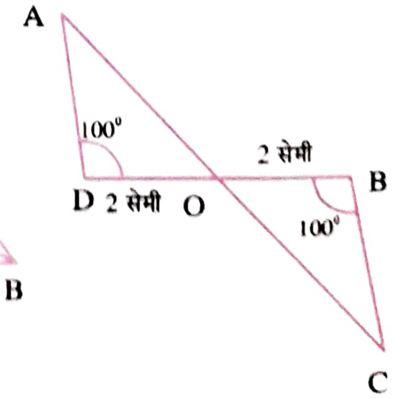
अभ्यास 13 (d)

1. निम्नलिखित त्रिभुजों में कौन - सा त्रिभुज किस त्रिभुज के सर्वांगसम है :





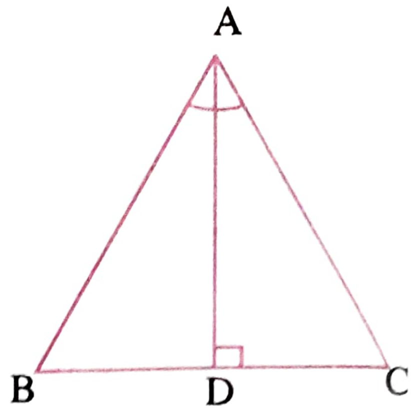




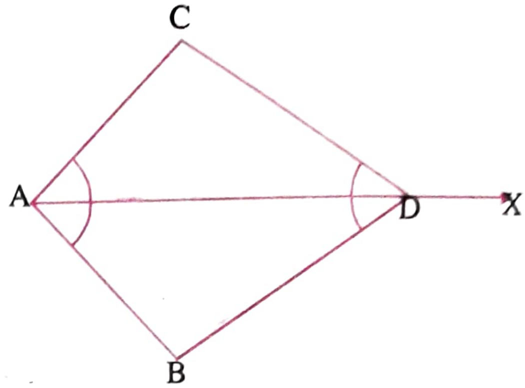
2. चित्र में AD, ∠A की अर्धक है, तथा AD ⊥ BC

(i) क्या Δ ADB ≅ Δ ADC ?

(ii)क्या यह कहना सही है कि BD = DC ?



3. चित्र में रेखा AX, ∠CAB और ∠BDC को समद्विभाजित करती है। उन तीन तथ्यों को बताइए जो यह सिद्ध करें कि Δ ABD ≅ Δ ACD



4. त्रिभुज Δ ABC की रचना कीजिये जबकि AC = 6 सेमी, ∠A = 60° तथा ∠C = 45° सेमी।

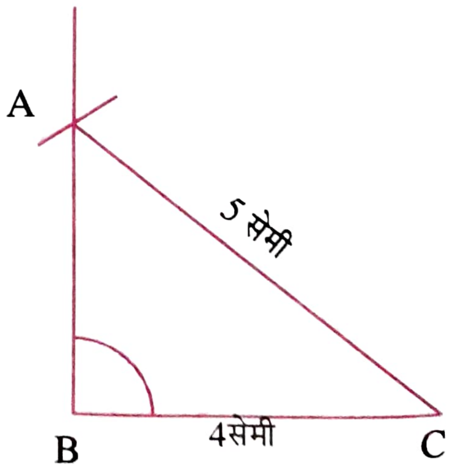
13.7 समकोण त्रिभुज की रचना करना जब कि इसका कर्ण व एक भुजा ज्ञात हो (R.H.S.) :

इन्हें कीजिए :

समकोण Δ ABC की रचना कीजिए, जिसकी भुजा BC = 4 सेमी, कर्ण AC =5 सेमी और ∠B = 90°

रचना

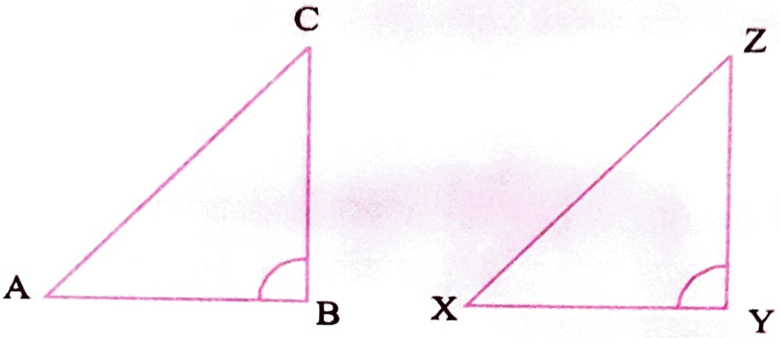
- 4 सेमी लम्बाई का रेखाखंड BC खींचिए।
- बिन्दु B पर 90° का कोण बनाती हुई किरण खींचिए।
- AC = 5 सेमी के बराबर परकार में लम्बाई लीजिए।
- परकार के सूई की नोक को भुजा BC के बिन्दु C पर रखकर एक चाप लगाइए।
- यह चाप 90° का कोण बनाने वाली रेखा को जिस बिन्दु पर काटे उसे बिन्दु A लिखिए।
- बिन्दु C को बिन्दु A से मिलाइए। Δ ABC अभीष्ट त्रिभुज है।



सर्वांगसमता की जाँच

प्रयास कीजिए

- एक ΔABC बनाइए। इस त्रिभुज पर ट्रेसिंग पेपर रखकर दूसरा ΔXYZ बनाइए। ΔXYZ को काटकर ΔABC पर रखिए और देखिए कि क्या दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढँक लेते हैं ? दोनों त्रिभुजों की भुजाओं को नापिये और देखिये कि दोनों त्रिभुज की भुजाओं में क्या सम्बन्ध है ?

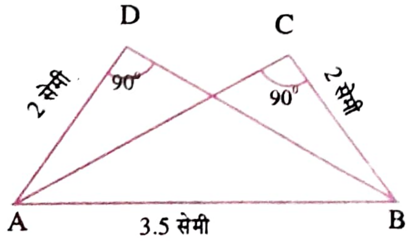


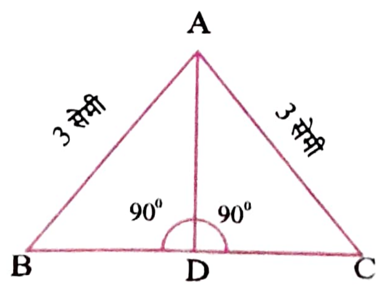
- एक समकोण त्रिभुज ΔABC खींचिए, जिसमें कर्ण $AC = 7$ सेमी, $\angle B = 90°$, भुजा $AB = 4$ सेमी एक दूसरा त्रिभुज XYZ खींचिए, जिसमें कर्ण $XZ = 7$ सेमी भुजा $ZY = 4$ सेमी, $\angle Y = 90°$ । इसकी सर्वांगसमता का परीक्षण कीजिए।

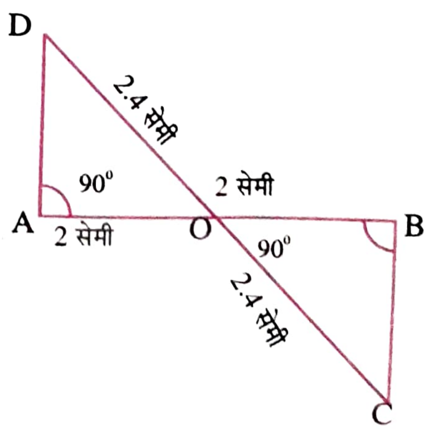
यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे समकोण - कर्ण - भुजा (R.H.S.) सर्वांगसमता कहते हैं।

अभ्यास 13 (e)

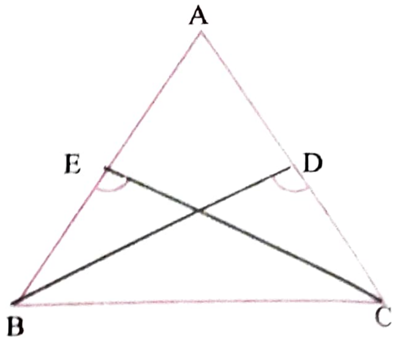
1. नीचे कुछ त्रिभुज के जोड़े दिये गये हैं। उनकी नाप भुजाओं के साथ लिख दी गई है। 'समकोण -कर्ण - भुजा' सर्वांगसमता का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज सर्वांगसम हैं ? परिणाम को सांकेतिक रूप में लिखिए।







2. BD और CE, Δ ABC की भुजाओं AC और AB पर क्रमशः लम्ब खींचे गये हैं और BD = CE



(i) क्या Δ DBC $\cong$ Δ ECB ?

(ii) भुजा EB और भुजा CD में क्या सम्बन्ध होगा ?

3. उस प्रतिबन्ध को अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए जबकि दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

4. त्रिभुज Δ ABC की रचना कीजिये जबकि AC = 13 सेमी, BC = 5 तथा $\angle$ B समकोण है।

त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल

इसे कीजिए तथा निष्कर्ष निकालिए :

- कोई तीन त्रिभुज Δ ABC, Δ DEF और Δ PQR बनाइए, इसके कोणों को किसी भी क्रम में $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ से प्रदर्शित कीजिए। प्रत्येक त्रिभुज के कोणों को नापिए और उनके योग कीजिए तथा अपनी अभ्यास पुस्तिका में निम्नलिखित सारिणी को पूरा कीजिए।

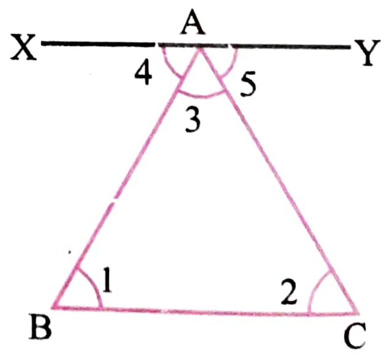
त्रिभुज	कोणों के नाप			योग
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$
Δ ABC				
Δ DEF				
Δ PQR				

निष्कर्ष :

हमने देखा त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योगफल 180° होता है।

त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योगफल 180° होता है, इसका सत्यापन निम्न प्रकार से भी कीजिए ।

- एक Δ ABC बनाइए। बिन्दु A से BC $\parallel$ XY खींचिए।



चित्रानुसार कोणों को 1, 2, 3, 4 और 5 से प्रदर्शित कीजिए ।

$\angle 4 = \angle 1$ (क्यों)

$\angle 5 = \angle 2$ (क्यों)

$\angle 3 = \angle 3$ (क्यों)

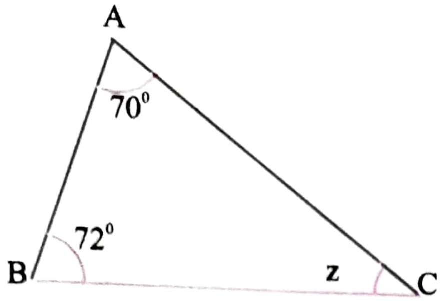
दोनों पक्षों को जोड़िए।

हमने देखा $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = 180°$

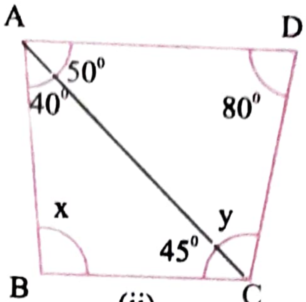
या $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योगफल 180° होता है ।

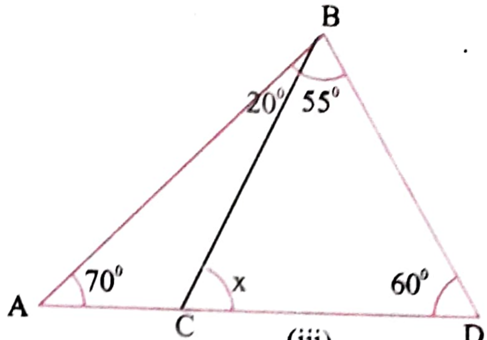
1. निम्नलिखित प्रश्नों में x, y, z का मान निकालिये



(i)

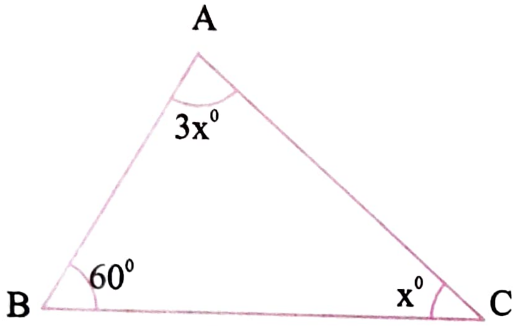


(ii)

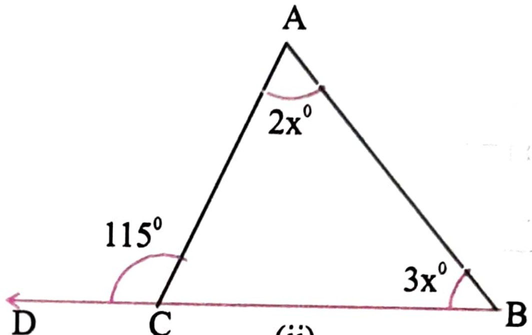


(iii)

2. चित्रानुसार x का मान ज्ञात कीजिए।

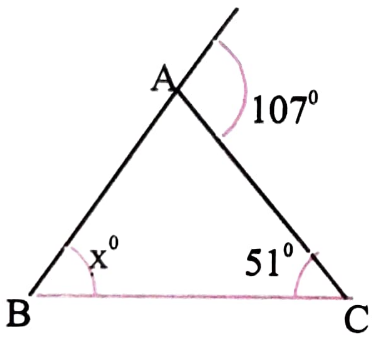


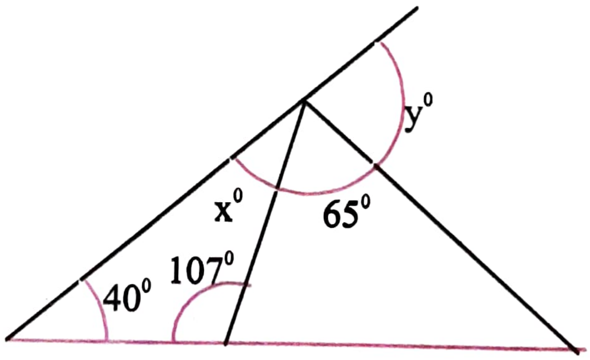
(i)



(ii)

3. निम्नलिखित चित्र में x, y का मान ज्ञात कीजिए।





4. Δ ABC में $\angle B = 72^0$, $\angle C = 64^0$, $\angle A$ को ज्ञात कीजिए।

5. यदि किसी त्रिभुज की कोणों में अनुपात 3 : 4 : 5 हो, तो कोणों को ज्ञात कीजिए।

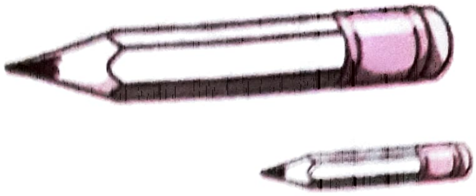
समरूपता की अवधारणा

आपने पढ़ा कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ, समान आकृति (shape) और समान माप (size) की होती हैं। प्रकृति में कुछ ऐसी आकृतियाँ है जो आकृति में समान रूप की होती है किन्तु समान माप की नहीं होती। निम्नलिखित चित्रों को ध्यान से देखें।

चित्र (i), (ii) में देखते हैं कि दोनों चित्र सेव के है परन्तु दोनों आकार में भिन्न-भिन्न है।

इसी प्रकार चित्र (iii), (iv) में देखते हैं कि दोनों चित्र पेंसिल के हैं। परन्तु दोनों आकार में भिन्न-भिन्न है।

(i) (ii)



(iii) (iv)

(v) (vi)

(viii) (viii)

चित्र (v), (vi) में देखते हैं कि दोनों चित्र फुटबॉल के हैं परन्तु दोनों आकार में भिन्न-भिन्न है। चित्र (vii), (viii) में देखते हैं कि दोनों चित्र बोतल के है परन्तु दोनों आकार में भिन्न है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपर्युक्त चित्रों के जोड़े रूप में समान है परन्तु आकार में भिन्न हैं।

ऐसी आकृतियाँ, जो रूप में समान होते हैं, समरूप आकृतियाँ (Similar shapes) कहलाती हैं।

निम्नलिखित को देखें और बताइये कि उसमें क्या सम्बन्ध है ?

1. किसी हॉकी के दो भिन्न आकार के चित्रों को ?
2. किसी पेड़ के दो भिन्न आकार के चित्रों को ?
3. हम देखते हैं कि सभी चित्रों की आकृतियाँ एक सी है परन्तु आकार भिन्न-भिन्न है।

ध्यान दें -

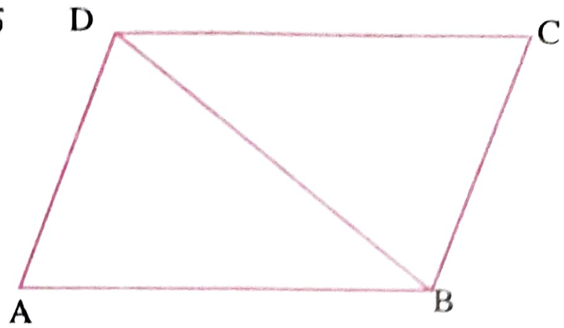
दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती है, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम हो।

प्रयास कीजिए

तीन समबाहु त्रिभुज खीचिये जिनकी भुजाए 3.0 सेमी, 4.0 सेमी एवं 5.0 सेमी। बताइये कि तीनों त्रिभुज समरूप होंगे या सर्वांगसम होंगे।

दक्षता अभ्यास -13

1. चित्र में $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ को देखकर निम्नांकित वैकल्पिक उत्तरों में सही उत्तर छाँटकर अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए।



(i) $\angle A$ का संगत कोण है -

(i) $\angle A$ (ii) $\angle D$ (iii) $\angle C$

(ii) भुजा AB की संगत भुजा है :

(i) CD (ii) AD (iii) BC

(iii) भुजा AD की संगत भुजा है :

(i) CB (ii) CD (iii) BA

(iv) DB की संगत भुजा है :

(i) BD (ii) DC (iii) BC

2. यदि कक्षा 6 के सभी शिक्षार्थी 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी भुजा वाले एक त्रिभुज की रचना करें, तो क्या बनने वाले सभी त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ?

3. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ तथा $AB = 3.2$ सेमी, $BC = 5$ सेमी और $CA = 7$ सेमी हों, तो ΔPQR की भुजाओं की नाप लिखिए।

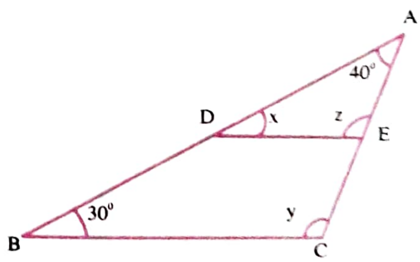
4. एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हैं, क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?

5. एक त्रिभुज के तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर हों, तो क्या दोनों त्रिभुज सदैव सर्वांगसम होते हैं ?

6. एक त्रिभुज का एक कोण 130° का है, शेष दो कोण आपस में बराबर हैं। इन दोनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

7. एक समकोण त्रिभुज के दो कोण बराबर हैं, दोनों कोण कितने-कितने अंश के हैं ?

8. पार्श्वांकित चित्र में बिन्दु D, E, त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि $DE \parallel BC$, यदि $\angle B = 30°$, $\angle A = 40°$ तो कोण x, y, z के मान ज्ञात कीजिए।

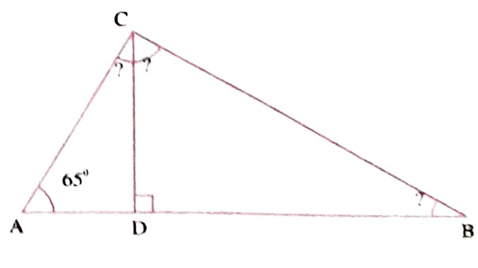


9. पार्श्वांकित चित्र में $\angle C$ समकोण है। $CD \perp AB$ है। $\angle A = 65°$, तो निम्नांकित कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\angle ACD$

(ii) $\angle BCD$

(iii) $\angle CBD$



विशेष प्रश्न : एक त्रिभुज का क्षेत्रफल उस वर्ग के बराबर है जिसकी भुजा 25 मीटर है। त्रिभुज के उस भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो शीर्ष बिन्दु से 10 मीटर दूर है : **N.T.S. 2009**

(1) 25 मीटर

(2) 55 मीटर

(3) 125 मीटर

(4) 75 मीटर

(3) 125 मीटर

इस इकाई में हमने सीखा

1. रेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति को बहुभुज कहते हैं।
2. वह बहुभुज जो तीन रेखाखंडों से बना हो, त्रिभुज कहलाता है।
3. त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।
4. जब दो आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णत: ढ़क लेती हैं, तो वे आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।
5. वे आकृतियाँ जो आकार और माप में समान होती हैं, सर्वांगसम होती हैं।
6. दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी लम्बाई समान है।
7. यदि दो कोणों के माप समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।
8. यदि दो त्रिभुज आकृति और आकार में समान हैं, तो वे सर्वांगसम होते हैं।
9. यदि ΔABC और ΔXYZ सर्वांगसम हैं तो उन्हें $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ लिखते हैं।
10. सर्वांगसम त्रिभुजों के शीर्ष, कोण और भुजाएं जो एक दूसरे को पूर्ण रूप से ढंक लेती हैं, क्रमश: संगत शीर्ष, संगत कोण और संगत भुजाएं कहलाती हैं।
11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते है। संक्षेप में इसे भु0 भु0 भु0 (SSS)सर्वांगसमता कहते हैं।
12. यदि दो त्रिभुजों की दो संगत भुजाएं और उनके बीच के कोण समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भु0 को0 भु0 (SAS) सर्वांगसमता कहते हैं।
13. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे को0 भु0 को0 (ASA) सर्वांगसमता कहते हैं।
14. यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे स0क0भु0 (RHS) सर्वांगसमता कहते हैं।
15. त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योगफल 180° होता है।
16. सभी सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं, लेकिन समरूप त्रिभुज सर्वांगसम नहीं होते हैं।

अभ्यास 13 (a)

2. (i)हाँ (ii) नहीं (iii)हाँ (iv) हाँ (v) नहीं (vi) हाँ (vii) नहीं
3. (i) अधिक कोण (ii) न्यूनकोण (iii) समकोण
4. (i) समद्विबाहु (ii) विषमबाहु (iii) विषमबाहु (iv) समबाहु
5. CD = 4.5 सेमी, 6. हाँ, 7. हाँ

अभ्यास 13 (b)

2. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, $\Delta AOB \cong \Delta AOC$, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, 3. (i)हाँ (ii) $AD \leftrightarrow CD$, $AB \leftrightarrow CB$, $DB \leftrightarrow DB$, $\angle A \leftrightarrow \angle C$, $\angle CBD \leftrightarrow \angle ABD$, $\angle CDB \leftrightarrow \angle ADB$; 4. (iii) सत्य

अभ्यास 13 (c)

1. $\Delta ABC \cong \Delta HIJ$, $\Delta PQR \cong \Delta EFG \cong \Delta KLM$, 2. हाँ; 3. हाँ

अभ्यास 13 (d)

1. $\Delta ABC \cong \Delta FED$, $\Delta ADB \cong \Delta BCA$, $\Delta ADO \cong \Delta CBO$, 2. (i)हाँ , (ii)हाँ; 3.AB= AC, BD = CD और AD, उभयनिष्ठ

अभ्यास 13 (e)

1. $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$; 2. हाँ, बराबर है

अभ्यास 13 (f)

1. (i) $z = 38^0$ (ii) $x = 95^0$, $y = 50^0$ (iii) $x = 65^0$
2. (i) $x = 30^0$ (ii) $x = 23^0$ 3. (i) $x = 50^0$ (ii) $x = 33^0$, $y = 82^0$
4. (i) 44^0 5. 45^0, 60^0, 75^0

दक्षता अभ्यास 13

1. (i) $\angle C$ (ii) भुजा CD (iii) भुजा BC (iv) भुजा BD 2.हाँ 3. PQ = 3.2 सेमी, QR = 5 सेमी, PR= 7 सेमी 4.हाँ 5. नहीं 6. 25°, 25° 7. 45°,45°, 8. $x = 30°$, $y = z = 110°$ 9. (i)25° (ii)65° (iii) 25°