



- ❖ गणितीय कथन का अर्थ स्पष्ट करना
- ❖ रेखीय समीकरण एक चर में (त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से)
- ❖ समीकरण हल करने की उपयुक्त विधि
- ❖ दैनिक जीवन पर आधारित रेखीय समीकरण के वार्तिक प्रश्न
- ❖ समीकरण को हल करने की पक्षान्तर विधि

11.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हम बीजीय व्यंजक, व्यंजक के पद, समान और असमान पदों की पहचान तथा समान पदों को परस्पर जोड़ने की विधा से अवगत हो चुके हैं। इसके साथ ही शब्दों और वाक्यों में वर्णित व्यावहारिक जीवन से सम्बन्धित साधारण भाषा वाले गणितीय कथनों को किसी चर के माध्यम से व्यंजक के रूप में लिखने की कला से भलीभांति अवगत हो चुके हैं। आइए हम साधारण भाषा वाले गणितीय कथन को चर वाले व्यंजक के रूप में बदलने को एक उदाहरण के द्वारा समझें।

राकेश ने अप्पू से कहा, मेरे पास जितने फूल हैं उसका 4 गुना करके 5 फूल और जोड़ने पर कुल फूलों की संख्या 45 हो जाती है। इसे बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए।

इस कथन को लिखने के लिए अप्पू सोचता है, चूंकि राकेश के पास फूलों की संख्या ज्ञात नहीं है इसलिए वह मान लेता है कि राकेश के पास x फूल हैं। फूलों की संख्या का 4 गुना $= 4x$ कर पुनः 5 फूल और जोड़ने पर, फूलों की संख्या $= 4x + 5$; यह एक बीजीय व्यंजक है जो अक्षर संख्या एवं अंक संख्याओं तथा मूल संक्रियाओं से मिलकर बना है। अतः कथन के अनुसार $4x + 5 = 45$, जो एक चर वाला रेखीय समीकरण है। इस इकाई में हम रेखीय समीकरण (एक चर में) का अध्ययन करेंगे।

11.2. गणितीय कथन का अर्थ

हम अपने दैनिक जीवन के वार्तालाप में कई प्रकार के वाक्य बोलते हैं। इनमें से कुछ निम्नलिखित वाक्यों को पढ़िए :

1. आज रात में वर्षा होगी।
2. आज के मैच में भारत जीतेगा।
3. दिल्ली, भारत की राजधानी है।
4. संख्या 6 संख्या 10 से बड़ी है।
5. पाँच तीन से छोटा है।

इन वाक्यों में से प्रथम व द्वितीय वाक्य के सत्य अथवा असत्य होने की बात निश्चित रूप से नहीं कही जा सकती है, जबकि वाक्य 3, 4 और 5 का सत्य या असत्य होना सुनिश्चित है।

ऐसे वाक्य जिनका सत्य या असत्य होना सुनिश्चित हो, कथन कहलाता है।

आइए अब हम कुछ अन्य कथनों पर विचार करते हैं जो मूलभूत संक्रियाओं पर आधारित हैं:

कथन :

- (1) $6+5 = 11$(सत्य)
- (2) $6 > 4$ (सत्य)
- (3) $3 < 2$(असत्य)
- (4) $x + 2 = 3$ (सत्यता x के मान पर निर्भर)
- (5) $2x < 7$(सत्यता x के मान पर निर्भर)
- (6) $x - 6 = 9$(सत्यता x के मान पर निर्भर)

हमने देखा कि इसमें से कथन (1), (2), (3) ऐसे कथन हैं, जिसमें अक्षर संख्या नहीं है। ये कथन सर्वथा सत्य अथवा असत्य कथन कहलाते हैं।

कथन (4), (5), (6) सर्वथा सत्य अथवा असत्य कथन नहीं हैं। इन कथनों की सत्यता x के मान पर निर्भर करती है।

उदाहरणार्थ, $x + 2 = 3$, x के मान 1 के लिए ही सत्य है। शेष सभी मानों के लिए असत्य है।

पुनः कथन (1), (4), (6) पर विचार कीजिए:

$$6 + 5 = 11 \text{ (1)}$$

$$x + 2 = 3 \text{ (4)}$$

$$x - 6 = 9 \text{(6)}$$

इन सभी कथनों में समानता सूचक चिह्न '=' का प्रयोग किया गया है। अतः ये सभी कथन समानता सूचक कथन कहलाते हैं। कथन (4) और (6) की सत्यता x के मान पर निर्भर करती है

11.3. समीकरण क्या है?

आपने बीजीय व्यंजक की अवधारणा के अन्तर्गत तीलियों द्वारा अक्षर V, N आदि के विभिन्न प्रतिरूपों को बनाकर उसमें प्रयुक्त होने वाली तीलियों की संख्या जानने के लिए, एक नियम ज्ञात किया था।

ध्यान दें, V का एक प्रतिरूप बनाने के लिए तीलियों की संख्या 2 है किन्तु V के n प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2n$ जहाँ n का मान 1, 2, 3, 4, हो सकता है।

इसी प्रकार हम देखते हैं कि N का एक प्रतिरूप बनाने के लिए तीलियों की संख्या 3 है। किन्तु N के n प्रतिरूपों को बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या $= 3n$ जहाँ n के मान 1, 2, 3, 4, हो सकते हैं।

यहाँ हम देखते हैं कि तीलियों की संख्या n के मान के साथ बदलती जाती है, इसलिए n को चर (variable) कहते हैं। चर को दर्शाने के लिए $l, m, n, p, q, r, x, y, z$ आदि अक्षरों का प्रयोग करते हैं।

प्रयास कीजिए

तीलियों की सहायता से M के प्रतिरूप बनाइए और इनके विभिन्न प्रतिरूपों के लिए आवश्यक तीलियों को ज्ञात करने के लिए नियम लिखिए।

उपर्युक्त में यदि आपको 10 तीलियाँ दी गई हों तो V के कितने प्रतिरूप बना सकते हैं।

हम देख चुके हैं कि, V के लिए आवश्यक तीलियों की सं० $= 2n$, जहाँ n , V के प्रतिरूपों की संख्या है।

$$\text{अतः } 2n = 10 \dots\dots\dots(1)$$

यहाँ हम एक प्रतिबन्ध प्राप्त करते हैं; जो चर n द्वारा संतुष्ट हो रहा है। हम इसे निम्नांकित सारणी से जाँच सकते हैं।

बनाये गये V की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	...
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	...

विलोमतः यदि आपको तीलियों की संख्या दी गई है तो V प्रतिरूपों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

यदि आपको 10 तीलियाँ दी हुई हों तो आप V के कितने प्रतिरूप बना सकते हैं ?

इस स्थिति में $2n = 10$, यह एक ऐसा प्रतिबन्ध है जो चर n द्वारा संतुष्ट होना चाहिए।

n का मान	$2n$ का मान	प्रतिबन्ध संतुष्ट है हाँ/नहीं
1	2	नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	हाँ
6	12	नहीं

हम पाते हैं कि केवल $n = 5$ के लिए उपर्युक्त प्रतिबन्ध $2n = 10$ संतुष्ट होता है, 5 के अतिरिक्त अन्य किसी मान के लिए नहीं।

निष्कर्ष

एक समीकरण समता सूचक धिहन युक्त बीजीय व्यंजक पर एक प्रतिबन्ध है, जिसमें चर के किसी विशिष्ट मान के लिए व्यंजक (समिका) के दोनों पक्षों का मान समान होता है। चर का यह विशिष्ट मान समीकरण का हल कहलाता है।

समीकरण एक संतुलित तराजू की तरह होता है जिसके बायें पलड़े में बांट रखते हैं और दाँये पलड़े में तौली जाने वाली वस्तु रखी जाती है।

समीकरण को कथनों में बदलिए :

$$(i) x + 7 = 12$$

$$(ii) 5x = 20$$

$$(iii) \frac{m}{3} - 5 = 10$$

समीकरण हल करना

$$3x + 7 = 28$$

इस समीकरण के बाँये पक्ष में x को अलग करने के लिए चरण बद्ध प्रक्रिया अपनाते हैं। यहाँ बाँया पक्ष $3x + 7$ है। इसमें $3x$ को अलग करने के लिए दोनों पक्षों से 7 घटा देते हैं जिससे समीकरण प्रत्येक दशा में संतुलित रहे।

अतः दोनों पक्षों से 7 घटाने पर

$$3x + 7 - 7 = 28 - 7$$

$$3x = 21$$

पुनः दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$

$x = 7$ समीकरण का हल है।

समीकरण बनाना

शैली ने भाई विशाल को कुछ रुपये दिये तथा उसकी माँ ने भी विशाल को ₹ 5 दिये। अब उसके पास ₹ 50 हो गये। शैली ने विकास को कितने रुपये दिये ?

माना शैली ने विशाल को ₹ x दिये तथा

माँ ने विशाल को ₹ 5 दिये। अब विशाल के पास ₹ 50 हो गये।

$$\text{अतः } x + 5 = 50$$

$$x = 50 - 5 = 45$$

निम्नलिखित गणितीय कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए। जाँच कीजिए कि यह समीकरण है या नहीं।

(1) यदि किसी संख्या के 6 गुने से आप 8 घटाएँ तो 10 प्राप्त होता है।

(2) किसी संख्या के 4 गुने में पाँच जोड़ा जाय तो 21 प्राप्त होता है।

$$(1) 6x - 8 = 10$$

$$(2) 4x + 5 = 21$$

$$\text{जाँच: } 6x - 8 = 10$$

x का मान	बाँया पक्ष	दाँया पक्ष
1	$6 \times 1 - 8 = -2$	10
2	$6 \times 2 - 8 = 4$	10
3	$6 \times 3 - 8 = 10$	10

गणितीय कथन 1 का बीजीय व्यंजक रूप $6x - 8 = 10$ है, यह एक समीकरण है जिसका हल $x=3$ है।

जाँच : $4x + 5 = 21$

x	बाँया पक्ष	दाँया पक्ष
1	$4 \times 1 + 5 = 9$	21
2	$4 \times 2 + 5 = 13$	21
3	$4 \times 3 + 5 = 17$	21
4	$4 \times 4 + 5 = 21$	21

गणितीय कथन 2 का बीजीय व्यंजक रूप $4x + 5 = 21$ है, यह एक समीकरण है जिसका हल $x=4$ है।



ध्यान दीजिए

समीकरण का समता सूचक चिह्न यह दर्शाता है कि समीकरण के चर के विशिष्ट मान के लिए इस समता चिह्न के बायीं ओर के व्यंजक (बायाँ पक्ष LHS) का मान और चिह्न के दायीं ओर के व्यंजक (दायाँ पक्ष RHS) का मान परस्पर बराबर है। यदि बाँया पक्ष और दाँया पक्ष के बीच में समता चिह्न के अतिरिक्त कोई अन्य चिह्न हो, तो वह एक समीकरण नहीं है।

$6x - 8 > 10$ समीकरण नहीं है।

$6x - 8 < 10$ समीकरण नहीं है।

$6x - 8 = 10$ समीकरण है।

उपर्युक्त समीकरण में दाँया पक्ष संख्यात्मक है जो एक आंकिक (अंकगणितीय) व्यंजक है। परन्तु सदैव ऐसा होना आवश्यक नहीं है। दाँया पक्ष (RHS) चर से युक्त एक व्यंजक भी हो सकता है।

किसी समीकरण में बायें और दायें पक्षों में से कम से कम किसी एक पक्ष को चर से युक्त व्यंजक अवश्य होना चाहिए अन्यथा यह समीकरण नहीं होगा, अपितु यह अंकगणितीय समिका होगी।

जब किसी समीकरण में उपस्थित चर की अधिकतम घात एक होती है तो ऐसे समीकरण को रेखीय समीकरण कहते हैं।

$6x - 8 = 10$ और $4x + 5 = 20$ रेखीय समीकरण हैं।

निम्नांकित को गणितीय कथन के रूप में लिखिए और रेखीय समीकरण छांटिए:

1. $11 + 12 = 23$

2. $x + 4 = 6$

3. $10 \times 3 = 30$

4. $2x + 5 = x - 7$

✎ प्रयास कीजिए

निम्नांकित समीकरणों से बाँया पक्ष तथा दाँया पक्ष अलग-अलग छांटिए:

1. $x + 12 = 13$

2. $3x + 5 = 17$

3. $10x = 30$

4. $2x + 5 = x + 7$

5. $\frac{x}{3} = 14 - 2x$

समीकरण का हल :

निम्नांकित समीकरण पर विचार कीजिए :

$$8 + x = 13$$

यह समीकरण यह व्यक्त करता है कि 8 में x जोड़ने पर योगफल 13 प्राप्त होता है। स्पष्ट है कि यहाँ x का मान 5 है, क्योंकि 8 में 5 जोड़ने पर योगफल 13 प्राप्त होता है।

इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि x के स्थान पर 5 प्रतिस्थापित करने से बाएँ पक्ष का मान दाएँ पक्ष के बराबर होता है अर्थात् समीकरण सन्तुष्ट हो जाता है।

अतः $x = 5$ समीकरण का हल है तथा 5 को समीकरण का मूल भी कहते हैं।

वह संख्या जो चर के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर समीकरण को सन्तुष्ट कर देती है, उस समीकरण का हल कहलाती है।

✎ प्रयास कीजिए

हल कीजिए

1. $x + 1 = 2$

2. $x + 7 = 5$

3. $x + 2 = 2$

11.4 रेखीय समीकरण को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल करना

उदाहरण 1 : $x + 6 = 9$

इस समीकरण को हल करने अर्थात् x का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित तालिकानुसार x के विभिन्न मान का प्रतिस्थापन कीजिए :

समीकरण $x + 6 = 9$

x का मान	बाँया पक्ष ($x + 6$) का मान	दाँया पक्ष का दिया हुआ मान
0	$0 + 6 = 6$	9
1	$1 + 6 = 7$	9
2	$2 + 6 = 8$	9
3	$3 + 6 = 9$	9

हम देखते हैं कि x के विभिन्न मानों में से केवल 3 ऐसा मान है जो समीकरण को सन्तुष्ट करता है।
अर्थात् $x = 3$ समीकरण का हल है।

उदाहरण 2: समीकरण $x + 7 = 3$ को हल कीजिए।

समीकरण $x + 7 = 3$

x के विभिन्न मान	बाँया पक्ष ($x + 7$) का मान	दाँया पक्ष का दिया हुआ मान
0	$0 + 7 = 7$	3
1	$1 + 7 = 8$	3
2	$2 + 7 = 9$	3
-1	$-1 + 7 = 6$	3
-2	$-2 + 7 = 5$	3
-3	$-3 + 7 = 4$	3
-4	$-4 + 7 = 3$	3

हम देखते हैं कि x का धनात्मक मान रखने पर बाएँ पक्ष का मान दाहिने पक्ष से क्रमशः बढ़ रहा है। अतः x के ऋणात्मक मान रखने पर $x = -4$ के लिए समीकरण सन्तुष्ट होता है।
अतः $x = -4$ समीकरण का हल है।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित समीकरणों को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि (तालिका विधि) द्वारा हल कीजिये :

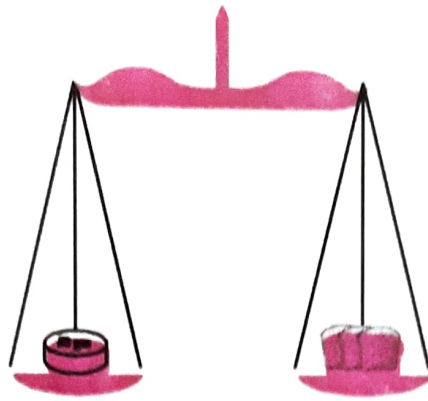
(1) $x + 2 = 5$

(2) $3 = x + 2$

(3) $x + 8 = 5$

रेखीय समीकरण हल करने की उपयुक्त विधि

हम लोगों ने तराजू पर सामान तौलते देखा है। तराजू पर रखी हुई किसी वस्तु के भार (अज्ञात मान) को दूसरे पलड़े पर बाट (ज्ञात मान) रखकर मालूम करते हैं। डंडी का क्षैतिज होना दोनों पलड़ों पर समान भार होना दर्शाता है।



अज्ञात मान (वस्तु) = ज्ञात मान (बाट)

समीकरण समझने के लिए एक उदाहरण लेते हैं।

एक फल की दुकान पर दीपिका ने दुकानदार से 3 किग्रा आम देने को कहा, दुकानदार ने तराजू के दायें पलड़े पर 3 किग्रा का बांट रखा और बायें पलड़े पर कुछ आम रख दिये। तराजू की डंडी बाट की ओर झुकी थी तो दुकानदार ने एक आम और बायें पलड़े पर रख दिया। तराजू की डंडी क्षैतिज हो गई और दोनों पलड़े सन्तुलन में बराबर हो गये। तभी उसकी बहन सारिका वहाँ पहुँची और सारिका ने दुकानदार से कहा कि इन्हीं आमों के साथ 2 किग्रा आम और तौल दीजिए। दुकानदार ने 2 किग्रा का बाट दायें पलड़े में रखा तो यह पलड़ा नीचे झुक गया। दुकानदार ने बायें पलड़े में आम रखना शुरू किया तो बायाँ पलड़ा भी नीचे झुकने लगा तथा बाट वाला पलड़ा ऊपर उठता गया। दुकानदार कुछ बड़े और कुछ छोटे आकार के आम अदल-बदल कर तब तक रखता रहा जब तक कि डंडी फिर से क्षैतिज स्थिति में नहीं हो गई। दुकानदार ने कहा यह लीजिये 5 किग्रा आम हैं।



क्रिया-कलाप :



समीकरण की तुलना हम तराजू से कर सकते हैं। तराजू के दोनो पलड़े समीकरण के दोनों पक्षों को प्रकट करते हैं एवं क्षैतिज होना पक्षों का बराबर होना प्रकट करता है।

यदि हम दोनों पलड़ों पर बराबर बाट रखें, तो डंडी क्षैतिज रहती है। यदि इसी प्रकार दोनो पलड़ों से बराबर भार के बाट निकाल लें, तो भी डंडी क्षैतिज रहती है।

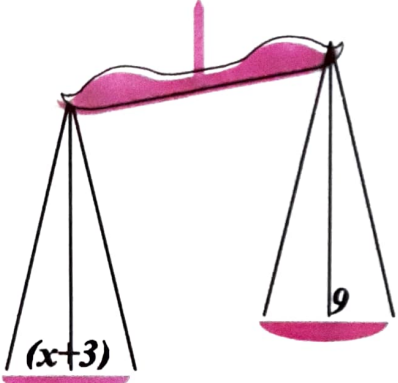
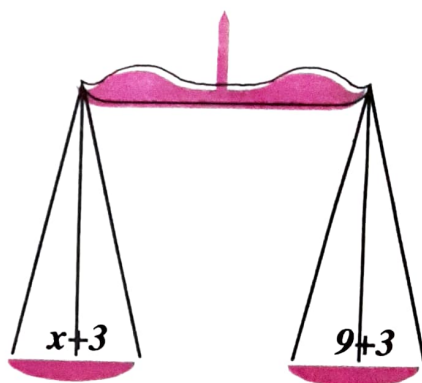
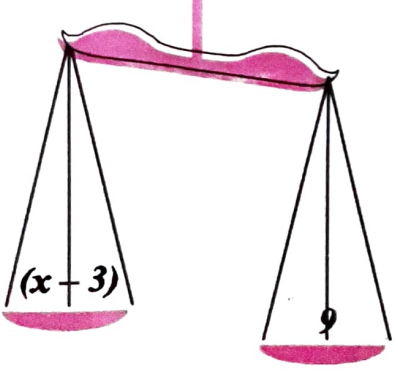
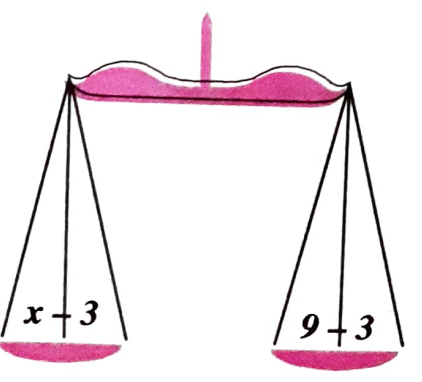
हम यह सिद्धान्त एक समीकरण को हल करने में प्रयोग करते हैं। संख्याओं को बाटों की तरह संतुलित करने के लिए प्रयोग किया जा सकता है, आइए कुछ उदाहरण लेते हैं।

माना तराजू के एक पलड़े पर x किग्रा की एक वस्तु रखने तथा दूसरे पलड़े पर 9 किग्रा का बाट रखने पर चित्रानुसार तराजू की डंडी क्षैतिज रहती है।

हम देख रहे हैं कि डंडी क्षैतिज है अर्थात दोनों पलड़ों पर रखी हुई वस्तुओं के भार (मान) बराबर हैं।

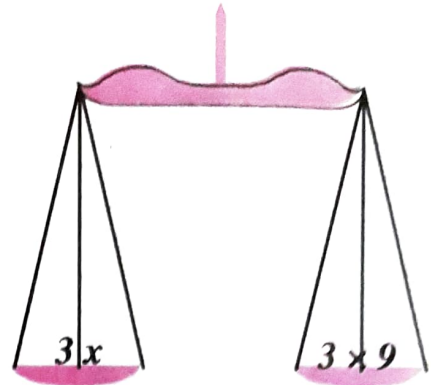
क्रियाकलाप

अब निम्नांकित चित्रों के नीचे लिखे गये क्रियाकलापों को देखिए

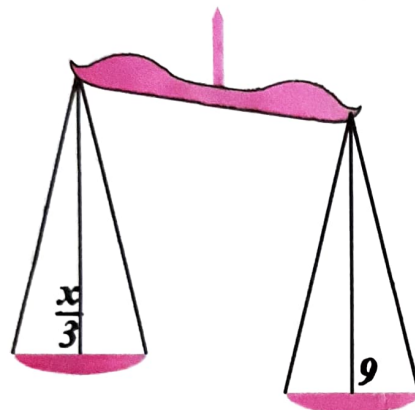
 बायें पलड़े में 3 किग्रा डाल देने पर डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।	 डंडी क्षैतिज करने के लिए दाएँ पलड़े में भी 3 किग्रा भार रखने पर $x + 3 = 9 + 3$ या, $x + 3 = 12$
 बाँए पलड़े से 3 किग्रा भार निकाल लें तो डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।	 डंडी क्षैतिज करने के लिए दाएँ पलड़े से भी 3 किग्रा भार निकालने पर $x - 3 = 9 - 3$ या $x - 3 = 6$



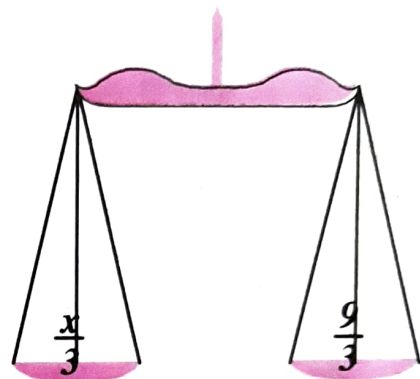
बाएँ पक्ष के भार को तिगुना करने पर डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।



डंडी क्षैतिज करने के लिए दाएँ पक्ष के भार को भी तिगुना करेंगे। $3x = 3 \times 9$, या, $3x = 27$



बाएँ पक्ष के भार को तिहाई करने पर डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।



डंडी क्षैतिज रखने के लिए दायें पलड़े के भार को भी तिहाई करना पड़ेगा। अर्थात् $\frac{x}{3} = \frac{9}{3}$

उपर्युक्त चारों क्रियाकलापों से निम्नांकित चार तथ्य उभरकर आते हैं :

प्रत्येक दशा में डंडी क्षैतिज बनी रहती है, यदि :

- दोनो पलड़ों पर बराबर भार रख दिया जाए।
- दोनों पलड़ों से बराबर भार हटा दिया जाए।
- दोनों पलड़ों के भारों को दुगुना, तिगुना आदि कर दिया जाय।
- दोनों पलड़ों के भारों को आधा, तिहाई आदि कर दिया जाय।

📌 निष्कर्ष :

- समीकरण के दोनों पक्षों में किसी भी समान संख्या के जोड़ने, घटाने, गुणा करने या शून्येतर समान संख्या से भाग देने से समीकरण अपरिवर्तित रहता है।
- ये सभी स्वयं सिद्धियाँ (Axioms) कहलाती हैं। इनका उपयोग समीकरण के हल करने में करते हैं।

उदाहरण 3: समीकरण $x + 7 = 15$ को हल कीजिए।

हल: $x + 7 = 15$

या, $x + 7 - 7 = 15 - 7 \dots$ हल करने के लिए बाएँ पक्ष में केवल x चाहिए। अतः $(+7)$ हटाने के लिए $(+7)$ घटाएँगे।

या, $x = 8$

उत्तर की जांच : बायाँ पक्ष $= x + 7 = 8 + 7 = 15 =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 4:

हल : $x - 9 = 11$

या, $x - 9 + 9 = 11 + 9 \dots$ (दोनों पक्षों में 9 जोड़ने पर)

या, $x = 20$

उत्तर की जांच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 5 : समीकरण $3n + 4 = 25$ को हल कीजिए।

हल : $3n + 4 = 25$

$3n + 4 - 4 = 25 - 4$ (दोनों पक्षों से 4 घटाने पर)

$3n = 21$

$\frac{3n}{3} = \frac{21}{3}$ (दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर)

अतः $n = 7$

उत्तर की जांच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 6: समीकरण $\frac{n}{3} = 20$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{n}{3} = 20$ या, $\frac{n}{3} \times 3 = 20 \times 3 \dots$ (दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर)

$n = 60$ (सरल करने पर)

उत्तर की स्वयं जांच कीजिए।

उदाहरण 7: समीकरण $5p = 15$ को हल कीजिए।

हल: $5p = 15$

या, $\frac{5p}{5} = \frac{15}{5} \dots$ (दोनों पक्षों में 5 से भाग देने पर)

अतः $p = 3$

उत्तर की स्वयं जांच कीजिए।

उदाहरण 8: समीकरण $3a + 5 = 17$ को हल कीजिए।

हल : $3a + 5 = 17$

या, $3a + 5 - 5 = 17 - 5$ (दोनों पक्षों में 5 घटाने पर)

या, $3a = 12$

$a = \frac{12}{3}$ (दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर)

या, $a = 4$

उत्तर की जांच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 9 : समीकरण $\frac{x}{2} - 1 = 2$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{x}{2} - 1 = 2$

या, $\frac{x}{2} - 1 + 1 = 2 + 1$ (दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर)

या, $\frac{x}{2} = 3$

या, $\frac{x \times 2}{2} = 3 \times 2$ (दोनों पक्षों में 2 का गुणा करने पर)

$x = 6$

उत्तर की स्वयं जांच कीजिए।

उदाहरण 10: समीकरण $7 + 5x = 15 + 3x$ को हल कीजिए।

हल : $7 + 5x = 15 + 3x$ (चर किसी भी पक्ष में हो सकता है। हल करने की दृष्टि से चर बाएँ पक्ष में रख लेते हैं।)

या, $7 + 5x - 3x = 15 + 3x - 3x$ (दोनों पक्षों से $3x$ को घटाने पर)

या, $7 + 2x = 15$

या, $7 + 2x - 7 = 15 - 7$ (दोनों पक्षों से 7 घटाने पर)

$2x = 8$

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर)

अतः $x = 4$

उत्तर की जांच : बायाँ पक्ष $= 7 + 5x = 7 + 5 \times 4 = 27$

दायाँ पक्ष $= 15 + 3x = 15 + 3 \times 4 = 27$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अभ्यास 11 (a)

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए एवं अपने उत्तर की जाँच कीजिए:

1. (a) $x + 2 = 3$ (b) $3 + x = 4$ (c) $15 = a + 12$
2. (a) $11 = b - 3$ (b) $y - 6 = 0$ (c) $3 + g = 3$
3. (a) $5g = 10$ (b) $3x = 12$ (c) $33 = 11x$
4. (a) $\frac{x}{3} = 2$ (b) $\frac{7x}{15} = 0$ (c) $\frac{y}{5} = 1$
5. (a) $2x - 3 = 5$ (b) $3 + 4x = x + 9$
 (c) $\frac{y}{7} + 1 = 2$ (d) $3 = 10 - \frac{z}{2}$
 (e) $\frac{5y}{3} + 1 = 6$ (f) $1.2x + 3 = 4.2$
 (g) $\frac{2}{3}x - 2 = 0$ (h) $\frac{2x - 3}{5} = 7$

11.6 ऐनिक जीवन पर आधारित रेखीय समीकरण सम्बन्धी वार्तिक प्रश्न

11.6.1 रेखीय समीकरण सम्बन्धी वार्तिक प्रश्न पढ़कर समीकरण बनाना

हमारे गाँव में एक लड़का है। उसका नाम सुनील है। उसके पास एक थैली है, उसमें कुछ अमरूद हैं। फरीद ने सुनील के थैले में 10 अमरूद और डाल दिए। इस प्रकार सुनील के थैले में 22 अमरूद हो गये। इस कथन को हम समीकरण की भाषा में अत्यन्त संक्षिप्त रूप से लिख सकते हैं।

मान लीजिए

सुनील के थैले में अमरूदों की संख्या = x (1)

फरीद द्वारा दिए गये अमरूदों की संख्या = 10 (2)

अब सुनील के थैले में कुल अमरूद = $x + 10$ (3)

प्रश्न के अन्तिम वाक्य के अनुसार थैले में

अमरूदों की संख्या = 22 (4)

कथन (3) और (4) समान हैं।

अतः हम लिख सकते हैं कि

$$x + 10 = 22$$

अतः किसी कथन को समीकरण का रूप देने के लिए :

1. प्रश्न पढ़कर ढूँढ़िए कि क्या ज्ञात करना है। इस अज्ञात मान को चर x मान लीजिए प्रश्न के कथन के अनुसार चर x में एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।
2. प्रश्न पुनः पढ़िये। चर x से युक्त व्यंजक और ज्ञात राशियों में एक समानता का सम्बन्ध स्थापित कीजिए। यही समीकरण होगा।

उदाहरण 11: कक्षा 6 की दो टीमों में क्रिकेट का मैच खेला गया। प्रथम टीम के रनों की संख्या दूसरी टीम के रनों की संख्या के दो गुने से 10 कम है। यदि दोनों टीमों ने मिलकर 110 रन बनाए हों, तो इस प्रतिबन्ध को समीकरण का रूप दीजिए।

हल : मान लीजिए कि दूसरी टीम के रनों की संख्या $= x$
 प्रथम टीम के रनों की संख्या $= 2x - 10$
 दोनों टीमों के रनों का योग $= 110$
 प्रतिबन्ध के अनुसार : $x + 2x - 10 = 110$
 या $3x - 10 = 110$

प्रयास कीजिए

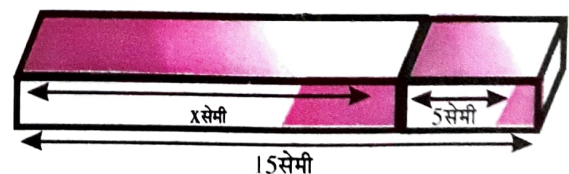
निम्नलिखित कथनों पर चर्चा कर समीकरण के रूप में लिखिए :

1. x और 6 का योगफल 13 है।
2. एक संख्या 9 से 5 कम है।
3. किसी संख्या का दुगुना 6 है।
4. x का पाँचवा भाग 3 है।

11.6.2 दैनिक जीवन सम्बन्धी प्रश्नों में एक अज्ञात राशि को रेखीय समीकरण की सहायता से ज्ञात करना

उदाहरण 12: पार्श्वकित चित्र से समीकरण बनाइए और x का मान ज्ञात कीजिए :

हल : $x + 5 = 15$
 या, $x + 5 - 5 = 15 - 5$
 या, $x = 10$



उदाहरण 13: 5 पुस्तकों का मूल्य 7 पुस्तकों के मूल्य से ₹ 14 कम है। एक पुस्तक का मूल्य बताइये।

हल: मान लीजिए कि एक पुस्तक का मूल्य ₹ x है।
 5 पुस्तकों का मूल्य $= 5x$ रुपये
 7 पुस्तकों का मूल्य $= 7x$ रुपये
 प्रश्नानुसार : $5x = 7x - 14$

$$\text{या, } 5x - 7x = 7x - 14 - 7x$$

$$\text{या, } -2x = -14$$

$$\text{या, } 2x = 14$$

$$\text{या } x = 7$$

अतः एक पुस्तक का मूल्य ₹ 7 है।

उदाहरण 14: मोहिन्दर की वर्तमान उम्र बताइए यदि वह 10 वर्ष पहले 35 वर्ष का था।

हल: मान लीजिए कि मोहिन्दर की वर्तमान उम्र x वर्ष है।

अतः उसकी 10 वर्ष पहले की उम्र $(x - 10)$ वर्ष होगी।

प्रश्नानुसार: $x - 10 = 35$

$$\text{या, } x - 10 + 10 = 35 + 10 \quad (\text{समीकरण के दोनों पक्षों में 10 जोड़ने पर})$$

$$\text{या, } x = 45$$

अतः मोहिन्दर की वर्तमान उम्र 45 वर्ष है।

समीकरण को हल करने की पक्षान्तर विधि

आइए, हम कुछ और समीकरणों को हल करने का अभ्यास करें। इन समीकरणों को हल करते समय एक संख्या (पद) को पक्षान्तर (transpose) करने (अर्थात् एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने) के बारे में सीखेंगे। आप किसी संख्या या पद को, समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों से घटाने के स्थान पर केवल पक्षान्तर कर सकते हैं। इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$m - 6 = 12$$

हल : समीकरण के दोनों पक्षों में 6 जोड़ने

$$m - 6 + 6 = 12 + 6$$

$$\text{या } m = 18$$

इसी क्रिया को निम्नांकित ढंग से भी कर सकते हैं :

$$m - 6 = 12$$

$$m = 12 + 6 = 18$$

यहाँ पर -6 को बाँये पक्ष से दाएँ पक्ष में ले जाने पर $+6$ कर देते हैं। इसी क्रिया को पक्षान्तर कहते हैं।

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$$P + 18 = 37$$

हल : पक्षान्तर करने पर

$$P = 37 - 18$$

$$= 19$$

आपने देखा, समीकरण को हल करते समय सामान्यतः समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ते हैं या उसमें एक ही संख्या घटाते हैं। किसी संख्या को पक्षान्तर करना, संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में घटाने जैसा ही है। ऐसा करने के लिए, उस संख्या का चिह्न बदलना पड़ता है। जो नियम संख्याओं के लिए प्रयोग किया जाता है, वही नियम व्यंजकों के लिए भी प्रयुक्त होता है। पक्षान्तर विधि को निम्नांकित उदाहरण से भी समझें।

दोनों पक्षों में संख्या जोड़कर या घटा कर समीकरण हल करना	पक्षान्तर करके समीकरण हल करना
1. $7x - 10 = 5$ दोनों पक्षों में 10 जोड़िये $7x - 10 + 10 = 5 + 10$ $7x = 15$ 2. $6P + 12 = 37$ दोनों पक्षों में से 12 घटाइये $6P + 12 - 12 = 37 - 12$ या $6P = 25$	1. $7x - 10 = 5$ बायें पक्ष से (-10) को पक्षान्तर करने पर इसका चिह्न बदल जायेगा अर्थात् (-10), बदल कर $+10$ हो जायेगा देखिए $7x = 5 + 10$ या $7x = 15$ 2. $6P + 12 = 37$ बायें पक्ष से $(+12)$ को पक्षान्तर करने इसका भी चिह्न बदल जायेगा अर्थात् $(+12)$ बदलकर (-12) हो जायेगा $6P = 37 - 12$ $6P = 25$

आइए पक्षान्तर विधि से कुछ और समकरणों को हल करें।

जैसे समीकरण (a) $n + 3 = 36$ और (b) $x - 7 = 16$ को हल कीजिए।

हल (a) $n + 3 = 36$

$(+3)$ को बायें पक्ष से दायें पक्ष में ले जाने पर

$$n = 36 - 3$$

$$n = 33$$

(b) $x - 7 = 16$

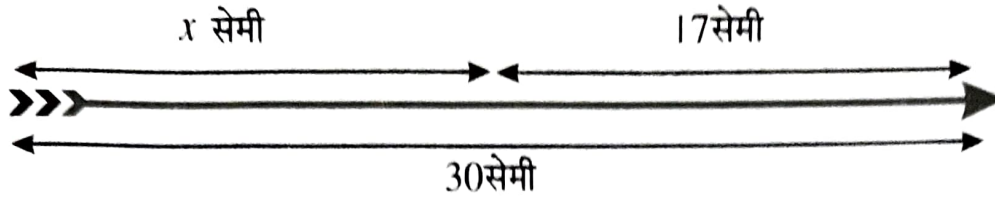
(-7) बायें पक्ष से दायें पक्ष में ले जाने पर

$$x = 16 + 7$$

$$x = 23$$

अभ्यास 11 (b)

1. निम्नांकित चित्र की सहायता से समीकरण बनाइये एवं x का मान ज्ञात कीजिए;



2. राम की उम्र श्याम से 5 वर्ष अधिक है, यदि राम की वर्तमान उम्र 28 वर्ष है, तो श्याम की वर्तमान उम्र बताइए।
3. किसी संख्या में 5 जोड़ने पर 15 प्राप्त होता है, संख्या बताइए।
4. शशि ने कुछ पेन्सिलें खरीदीं। 2 पेन्सिल उसने अपनी छोटी बहन को दे दी। अब उसके पास यदि 3 पेन्सिलें बची हों, तो उसने कुल कितनी पेन्सिलें खरीदी थीं ?
5. प्रज्ञा का वजन पहले से 3 किग्रा बढ़कर 17 किग्रा हो जाता है। उसका भार पहले कितना था?
6. y मीटर लम्बे फीते को 7 बराबर भागों में बाँटा गया है। यदि प्रत्येक भाग की लम्बाई 3 मीटर हो, तो y का मान ज्ञात कीजिए।
7. किसी संख्या का आधा, उसकी चौथाई से 10 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
8. एक ठेले पर 550 संतरे हैं। इन्हें दो ठेलों पर इस प्रकार बाँटिए कि उनमें से एक पर दूसरे की अपेक्षा 50 संतरे अधिक हों।
9. निम्नांकित समीकरणों को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल कीजिए।

(a) $x + 6 = 10$

(b) $x + 9 = 5$
10. निम्नांकित समीकरणों को पक्षान्तर विधि से हल कीजिए।

(a) $P + 19 = 21$

(b) $n - 7 = 8$

(c) $x - 11 = 20$

(d) $7 = y + 8$

(e) $x + 5 = 0$

इस इकाई में हमने सीखा

1. चर वे संख्याएँ हैं, जिनके मान स्थिर या निश्चित नहीं हैं।
2. समीकरण, चर पर एक प्रतिबन्ध है। इसके अन्तर्गत एक चर वाला व्यंजक और एक स्थिर संख्या को बराबर लिखते हैं। जैसे : $x - 4 = 10$, $4x = 12$, $5 - 2x = 3$ इत्यादि।
3. समीकरण में बाँया पक्ष और दाँया पक्ष बराबर होता है, इन दोनों पक्षों के बीच में समता का चिह्न ($=$) होता है
4. समीकरण चर के जिस निश्चित मान के लिए संतुष्ट होता है, वह मान समीकरण का हल कहलाता है।
5. रेखीय समीकरण को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल करना सिखाया गया है। इस विधि में, हम चर को कोई मान देकर जांच करते हैं कि यह मान समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं। समीकरण में हम चर को ऐसे विभिन्न मान

तब तक देते रहते हैं, जब तक कि समीकरण संतुष्ट न हो जाय। समीकरण जिस मान के लिए संतुष्ट होता है, वह मान उस समीकरण का हल होता है।

6. समीकरण हल करने की विधि के अन्तर्गत दोनों पक्षों में उपयुक्त संख्या को जोड़कर, घटाकर, गुणाकर अथवा भाग देकर एक पक्ष में केवल चर संख्या को प्राप्त करते हैं तथा उसके सापेक्ष दूसरे पक्ष में अचर संख्या प्राप्त करते हैं। यही चर के सापेक्ष प्राप्त अचर संख्या समीकरण का हल होती है।
7. समीकरणों को पक्षान्तर विधि से भी हल करना सिखाया गया है, इस विधि में चर संख्या अथवा अचर संख्या को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाते हैं। ऐसा करते समय संख्या का चिह्न +, - को क्रमशः -, + में बदल देते हैं।
8. दैनिक जीवन पर आधारित वार्तिक प्रश्नों को समीकरण के रूप में रूपान्तरित कर हल करना बताया गया है।



उत्तरमाला

अभ्यास 11 (a)

1. (a) $x = 1$, (b) $x = 1$, (c) $a = 3$, 2. (a) $b = 14$, (b) $y = 6$, (c) $g = 0$, 3. (a) $g = 2$, (b) $x = 4$, (c) $x = 3$, 4. (a) $x = 6$, (b) $x = 0$, (c) $y = 5$, 5. (a) $x = 4$, (b) $x = 2$, (c) $y = 7$, (d) $z = 14$, (e) $y = 3$, (f) $x = 1$, (g) $x = 3$, (h) $x = 19$ ।

अभ्यास 11 (b)

1. (1) $x = 13$, (2) 23 वर्ष, (3) 10, (4) 5, (5) 14 किग्रा, (6) 21 मी, (7) 40 ; (8) 300, 250 ; (9) (a) 4, (b) -4; (10) (a) 2, (b) 15, (c) 31, (d) -1, (e) -5