इकाई : 10 लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक

AN7DQR

- अपवर्तक
- अपवर्त्य
- अपवर्तक, समापवर्तक तथा महत्तम समापवर्तक (म०स०)
- अपवर्त्य, समापवर्त्य तथा लघुत्तम समापवर्त्य (ल०स०)
- भाग विधि से म०स० ज्ञात करना
- दो संख्याओं एवं उनके ल०स० एवं म०स० के मध्य सम्बन्ध
- ल० स० तथा म० स० का दैनिक जीवन में उपयोग

10.1 भूमिका :

आप प्राकृतिक संख्याओं, पूर्ण संख्याओं तथा पूर्णांक संख्याओं से भली भाँति परिचित हो चुके हैं। इन संख्याओं में होने वाली योग, घटाना, गुणा तथा भाग की संक्रियाओं को भी आप जानते हैं। गुणा की संक्रिया द्वारा यह स्पष्ट है कि प्रत्येक संख्या को दो या दो से अधिक संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं, इसी प्रकार भाग की संक्रिया के माध्यम से यह स्पष्ट होता है कि प्रत्येक संख्या स्वयं से या किन्ही अन्य संख्याओं से पूरा-पूरा विभाजित हो जाती है या विभाजन के बाद कुछ शेष रह जाता है। आइए, हम देखें कि किसी प्राकृतिक संख्या को किन-किन संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं तथा किसी प्राकृतिक संख्या के पूर्ण विभाजक संख्या को कैसे प्राप्त करते हैं। किसी प्राकृतिक संख्या को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्याएँ उसकी अपवर्तक कहलाती हैं तथा वह संख्या प्रत्येक अपवर्तक का एक अपवर्त्य होती है। उदाहरणार्थ संख्या 15 को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्याएँ 1,3,5 और 15; 15 के अपवर्तक हैं और स्वयं 15; 1,3,5 और 15 में से प्रत्येक संख्या का एक अपवर्त्य है। इस इकाई में हम प्राकृतिक संख्याओं के अपवर्तक, समापवर्तक और महत्तम समापवर्तक के साथ-साथ उनके अपवर्त्य, समापवर्त्य और लघुत्तम समापवर्त्य का अध्ययन करेंगे। इसके अतिरिक्त हम दो संख्याओं के गुणनफल तथा उनके महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य के बीच के सम्बन्धों का भी अध्ययन करेंगे।

10.2: अपवर्तक

शीला के पास 12 गोलियाँ हैं । वह इन्हें पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करती है कि प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान हो । वह इन्हें निम्नांकित विधियों से व्यवस्थित करती है और गोलियों की कुल संख्या की गणना करती है :

(1) प्रत्येक पंक्ति में 1 गोली

पंक्तियों की संख्या = 12

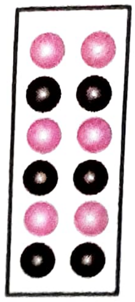
गोलियों की कुल संख्या = 1 ×12

= 12

(2) प्रत्येक पंक्ति में 2 गोलियाँ

पंक्तियों की संख्या = 6

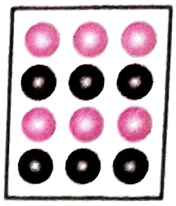
गोलियों की कुल संख्या = 2× 6 = 12



(3) प्रत्येक पंक्ति में 3 गोलियाँ

पंक्तियों की संख्या = 4

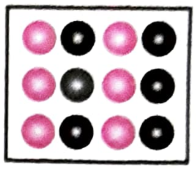
गोलियों की कुल संख्या = 3 × 4 = 12



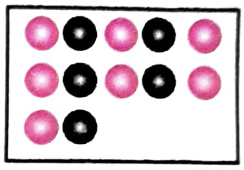
(4) प्रत्येक पंक्ति में 4 गोलियाँ

पंक्तियों की संख्या = 3

गोलियों की कुल संख्या = 4 × 3 = 12



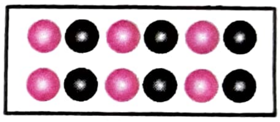
(5) प्रत्येक पंक्ति में 5 गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान रखने की व्यवस्था नहीं बन पाती है, जैसा कि पार्श्वांकित चित्र में देखते हैं।



(6) प्रत्येक पंक्ति में 6 गोलियाँ

पंक्तियों की संख्या = 2

गोलियों की कुल संख्या = 6 × 2 = 12



(7) प्रत्येक पंक्ति में क्रमशः 7, 8, 9, 10 और 11 गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान रखने की व्यवस्था नहीं बनती है, परन्तु एक पंक्ति में 12 गोलियों को रखने पर एक पंक्ति बन जाती है ।

पंक्ति की संख्या = 1

गोलियों की कुल संख्या = 12 × 1 = 12

इन गणनाओं में शीला देखती है कि 12 को विभिन्न प्रकार (विधियों) से दो संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखा जा सकता है ।

12 = 1 × 12; 12 = 2 × 6; 12 = 3 × 4 ; 12 = 4 × 3

12 = 6 × 2; 12 = 12 × 1;

इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 6 और 12 संख्या 12 के विभाजक हैं। इन्हें 12 के अपवर्तक कहा जाता है ।

कोई संख्या जिन-जिन संख्याओं से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है वे संख्याएँ उस संख्या की अपवर्तक कहलाती हैं।

आइए अब अग्रांकित सारणी में कुछ संख्याओं के अपवर्तक देखें और इसके माध्यम से अपवर्तक के कुछ रोचक तथ्यों पर विचार करें और निष्कर्ष निकालें:

संख्या	अपवर्तक
2	1, 2
6	1, 2, 3, 6
15	1, 3, 5, 15
69	1, 3, 23, 69
84	1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

निष्कर्ष :

हम देखते हैं कि -

- 1 प्रत्येक संख्या का अपवर्तक है ।
- प्रत्येक संख्या स्वयं का अपवर्तक होती है ।
- किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या का एक पूर्ण विभाजक है ।
- किसी दी हुई संख्या के अपवर्तकों की संख्या परिमित (सीमित) होती है ।
- किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है ।

10.3 अपवर्त्य (गुणज) :

जब हम 20 = 4 × 5 लिखते हैं, तो कहते हैं कि 4 और 5 संख्या 20 के गुणनखंड हैं। इसे हम इस प्रकार भी कहते हैं कि यहाँ 20, संख्या 4 और 5 का गुणज अथवा अपवर्त्य (Multiple) है ।

गुणज

↑

4 × 5 = 20

↓ ↓

अपवर्तक

इसी प्रकार 24 = 2× 12 यह दर्शाता है कि 2 और 12, संख्या 24 के अपवर्तक हैं तथा 24 2 और 12 का एक **अपवर्त्य** है, **अपवर्त्य** को **गुणज** भी कहते हैं ।

किसी संख्या में प्राकृतिक संख्याओं (1, 2, 3, 4...) से गुणा करने पर उस संख्या के विभिन्न गुणज अथवा अपवर्त्य प्राप्त होते हैं।

जैसे - 3 के गुणज अथवा अपवर्त्य , 3, 6, 9, ...

5 के अपवर्त्य , 5, 10, 15, 20, ... आदि

आइए अब निम्नांकित सारणी के माध्यम से अपवर्त्य के रोचक तथ्यों को देखें :

संख्या	अपवर्त्य
1	1, 2, 3, ...
7	7, 14, 21, ...
8	8, 16, 24, ...
10	10, 20, 30, ...
12	12, 24, 36, ...

✌ **निष्कर्ष :**

हम देखते हैं कि -

- कोई संख्या अपने प्रत्येक अपवर्तक का **अपवर्त्य** होती है ।
- किसी संख्या का प्रत्येक **अपवर्त्य** उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है ।
- किसी संख्या के **अपवर्त्यों** की संख्या अपरिमित (असीमित) होती है ।
- प्रत्येक संख्या स्वयं का एक **अपवर्त्य** है ।
- किसी संख्या में प्राकृतिक संख्याओं (1,2,3,...) से गुणा करने पर उस संख्या के विभिन्न अपवर्त्य प्राप्त होते हैं।

सम्पूर्ण संख्याएँ :

आइए अब हम कुछ संख्याओं के अपवर्तकों पर विचार करें ।

जैसे 6 के सभी अपवर्तक 1, 2, 3 और 6 हैं । इनका योगफल 1+ 2+ 3+ 6 = 12; जो संख्या 6 का दो गुना है।

इसी प्रकार 28 के सभी अपवर्तक 1, 2, 4, 7, 14 और 28 हैं । इनका योगफल 1 + 2 + 4 + 7 +14 + 28 = 56, जो संख्या 28 का दो गुना है।

यहाँ हम देखते हैं कि 6 और 28 के सभी अपवर्तकों का योगफल क्रमशः 6 और 28 का दो गुना है।

वह संख्या जिसके सभी अपवर्तकों का योगफल उस संख्या का दो गुना हो, एक **सम्पूर्ण संख्या** (Perfect number) कहलाती है। अतः 6 और 28 सम्पूर्ण संख्याएं हैं ।

इस प्रकार की कुछ और सम्पूर्ण संख्याएँ ढूँढ़िए।

अभ्यास 10 (a)

1. स्तम्भ 1 की संख्याओं का स्तम्भ 2 के अपवर्तकों से मिलान कीजिए :

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
(1) 15	(क) 1, 2, 4, 8, 16, 32
(2) 24	(ख) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
(3) 21	(ग) 1, 3, 5, 15

(4) 32 (घ) 1, 3, 7, 21

(5) 36 (ङ) 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24

2. निम्नांकित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए

(क) 3 (ख) 4 (ग) 5 (घ) 9

3. स्तम्भ 1 की संख्याओं का स्तम्भ 2 के साथ मिलान कीजिए :

स्तम्भ 1		स्तम्भ 2
(1)	15	(क) 7 का गुणज
(2)	20	(ख) 8 का गुणज
(3)	16	(ग) 50 का अपवर्तक
(4)	25	(घ 30 का अपवर्तक
(5)	35	(ङ) 20 का अपवर्तक

4. 7 के सभी अपवर्त्य ज्ञात कीजिए जो 100 से कम हों।

5. 496 के सभी अपवर्तकों को लिखिए और दिखाइए की यह एक सम्पूर्ण संख्या है ।

6. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

(1) प्रत्येक संख्या .... की .... होता है।

(2) प्रत्येक संख्या का पूर्ण विभाजक उसका ....होता है।

(3) किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या से .... या उसके .... होता है।

(4) प्रत्येक संख्या अपने अपवर्तक का एक .... होती है।

(5) 78 के अपवर्तक हैं ....।

10.4 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ :

निम्नांकित सारणी में कुछ संख्याओं के अपवर्तक लिखे गये हैं, इन संख्याओं के अपवर्तकों की संख्या पर ध्यान दीजिए ।

संख्या	अपवर्तक	अपवर्तकों की संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

कुछ संख्याएँ यथा 2, 3, 5, 7, 11 इत्यादि के केवल दो अपवर्तक (1 और स्वयं वह संख्या) हैं। ये संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ (Prime numbers) हैं ।

"ऐसी संख्याएँ जिनके अपवर्तक 1 और स्वयं वह संख्या ही होती है, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं ।"

कुछ संख्याएँ यथा 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादि ऐसी हैं, जिनके दो से अधिक अपवर्तक हैं, ये संख्याएँ भाज्य संख्याएँ (Composite numbers) हैं ।

हम देखते हैं कि :

"वे संख्याएँ जिनके दो से अधिक अपवर्तक होते हैं भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

संख्या 1 का एक ही अपवर्तक है । अतः 1 न तो भाज्य है और न अभाज्य है।

निष्कर्ष :

ऐसी संख्याएँ जो केवल 1 और स्वयं से ही पूरी-पूरी विभाजित होती हैं, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

ऐसी संख्याएँ जो 1 और स्वयं के अतिरिक्त अन्य संख्या/संख्याओं से भी पूरी-पूरी विभाजित होती हैं, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

10.5 अभाज्य गुणनखंड :

किसी संख्या के गुणनखंड करने की विधा से हम अवगत हो चुके हैं । अब हम कुछ उदाहरणों के माध्यम से अभाज्य गुणनखंड के विषय में विचार करेगें ।

$24 = 2 \times 12$
$= 2 \times 2 \times 6$
$= 2\times 2\times 2\times 3$

$24 = 4 \times 6$
$= 2 \times 2 \times 6$
$= 2 \times 2\times 2\times 3$

$24 = 3 \times 8$
$= 3 \times 2 \times 2\times 2$
$= 2\times 2\times 2\times 3$

यहाँ 24 के उपर्युक्त तीनों प्रकार से किये गये गुणनखंडों में अंत में हम एक ही गुणनखंड $2\times 2\times 2\times 3$ पाते हैं । इस गुणनखंड में केवल 2 और 3 ही गुणनखंड है, ये अभाज्य संख्याएँ हैं । किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंड अभाज्य गुणनखंडन (Prime factorisation) कहलाता है ।

आइए करें :

आइए 84 के अभाज्य गुणनखंडों को देखें :

$84 = 2 \times 42$
$= 2 \times 2 \times 21$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$84 = 4 \times 21$
$= 2 \times 2 \times 21$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$84 = 12 \times 7$
$= 4 \times 3 \times 7$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$84 = 6 \times 14$
$= 2 \times 3 \times 2 \times 7$

$84 = 28 \times 3$
$= 2 \times 14 \times 3$
$= 2 \times 2 \times 7 \times 3$

हम देखते हैं कि प्रत्येक ढंग में 84 के कुल 4 ही अभाज्य गुणनखंड प्राप्त होते हैं । इतना अवश्य है कि कहीं-कहीं गुणनखण्डों के क्रम बदले हुए हैं ।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि :

किसी भाज्य संख्या के अभाज्य गुणनखंडों की संख्या निश्चित होती है, परन्तु गुणनखंडों का क्रम कुछ भी हो सकता है ।

भाग-विधि द्वारा भी अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना हम पहले ही सीख चुके हैं, यथा

2	84
2	42
3	21
	7

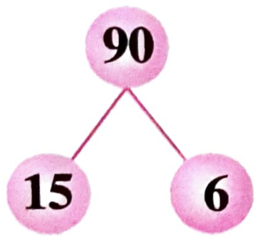
$\therefore 84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

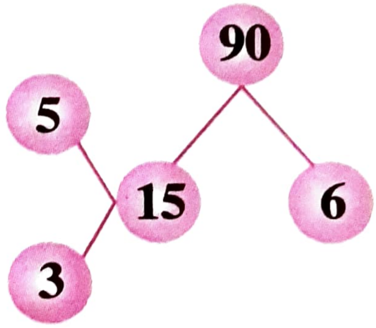
गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree)

संख्या 90 लिखिए

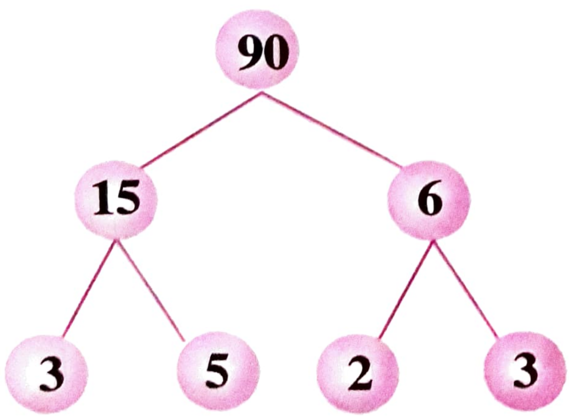
इसका कोई गुणनखंड युग्म सोचिए
$90 = 15 \times 6$

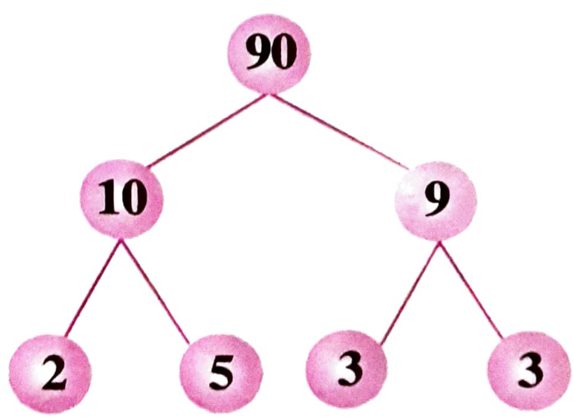
अब 15 के गुणनखंड सोचिए जैसे
$15 = 3 \times 5$





6 के गुणनखंड युग्म लिखिए

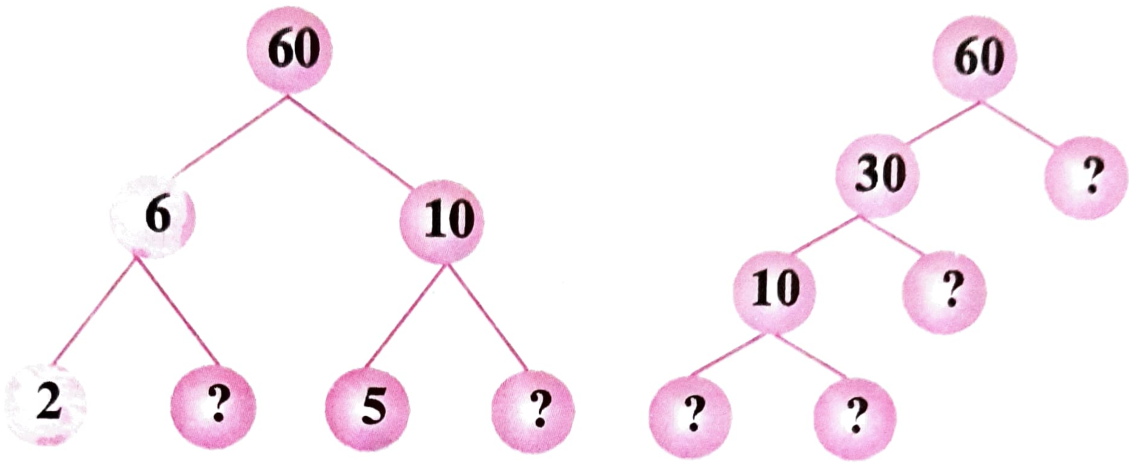




इस प्रकार $90 = 3 \times 5 \times 2 \times 3$, अथवा $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, अथवा $90 = 2 \times 5 \times 3 \times 3$ इत्यादि

अभ्यास 10 (b)

1. 9 के अभाज्य गुणनखंड बताइए ।
2. यदि किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंड 2, 2 और 3 हैं तो संख्या बताइए ।
3. एक संख्या के गुणनखंड 8 और 3 हैं । उसके अभाज्य गुणनखंड बताइए ।
4. यहाँ 60 के लिए दो भिन्न-भिन्न गुणनखंड वृक्ष दिये गये हैं । इनमें अज्ञात संख्याओं को अपने अभ्यास पुस्तिका पर लिखिए ।



5. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिए ।
6. पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिए ।
7. 1728 के अभाज्य गुणनखंड भाग-विधि द्वारा ज्ञात कीजिए ।
8. निम्नांकित संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

   112, 120, 135, 140, 150, 1228
9. 80 और 90 के बीच अभाज्य संख्याएँ हैं :

   (1) 81 और 83   (3) 83 और 87

   (2) 81 और 89   (4) 83 और 89

   (रा.प्र.खो. परीक्षा - 2005)
10. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

    (i) वे संख्याएँ जिनके दो या दो से अधिक अपवर्तक होते हैं .... कहलाती हैं।

    (ii) वे संख्याएँ जिनके अपवर्तक 1और स्वयं वह संख्या होती हैं, ... कहलाती हैं।

    (iii) एक न तो .... और न ही .... है।

    (iv) एक संख्या के अपवर्त्य 7, 14, 21, 24, ... हैं। वह संख्या ....है।

10.6 अपवर्तक, समापवर्तक तथा महत्तम समापवर्तक :

हम जानते हैं कि किसी संख्या को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्या उसका अपवर्तक (गुणनखंड) कहलाती है । नीचे सारणी देखकर विचार करें ।

संख्या	अपवर्तक
48	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
64	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

यहाँ हम देखते हैं कि उपर्युक्त संख्याओं के सम अथवा सार्व अपवर्तक 1, 2, 4 और 8 हैं जिनमें सबसे बड़ा 8 है । अतः संख्याओं 48, 64, और 72 का महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) 8 होगा । महत्तम समापवर्तक को संक्षेप में म०स० (या H.C.F) अथवा महत्तम (सबसे बड़ा) सार्व भाजक (Greatest common divisor G.C.D.) भी कहा जाता है ।

दो या अधिक दी हुई संख्याओं के सार्व अपवर्तकों में सबसे बड़ा सार्व अपवर्तक दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक कहलाता है।

प्रयास कीजिए :

45, 60 और 75 के सभी अपवर्तक लिखकर इनका महत्तम सार्व भाजक ज्ञात कीजिए ।

आइए सोचें और निष्कर्ष निकालें :

4 के अपवर्तक = 1, 2, 4

9 के अपवर्तक = 1, 3, 9

अतः दोनों का समापवर्तक केवल 1 है, और यही 4 और 9 का म०स० होगा । इस प्रकार की संख्याएं सह-अभाज्य संख्याएँ होती हैं ।

ऐसी दो संख्याएं जिनका म०स० 1 हो, सह-अभाज्य (Co- prime) संख्याएं कहलाती हैं ।

पुनः देखिए ,

12 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 4, 6, 12

18 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6, 9, 18

इनके समापवर्तक 1, 2, 3 और 6 हैं जिनमें सबसे बड़ा 6 है ।

$\therefore$ म0स0 (12, 18) = 6

पुनः 8 के अपवर्तक = 1, 2, 4, 8

16 के अपवर्तक = 1, 2, 4, 8, 16

स्पष्टतः 8 और 16 का म0स0 = 8

उपर्युक्त तीनों उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि

> **सह-अभाज्य संख्याओं का म0स0 सदैव 1 होता है ।**
> **सामान्यतः संख्याओं का म0स0 या तो सभी संख्याओं से छोटा होता है अथवा उनमें से सबसे छोटी संख्या के बराबर होता है ।**

10.7 गुणनखंड विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना :

48, 64 तथा 72 के अभाज्य गुणनखंडों को देखिए

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

म0स0 ज्ञात करने के लिए निम्नांकित क्रियाविधि सुगम है :

(1) पहले सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों को देखकर उनमें से सबसे छोटा अभाज्य गुणनखंड चुनिए।वह जितनी बार सभी संख्याओं के गुणनखंडों में सर्वनिष्ठ हो, उसे उतनी ही बार उतार लीजिए।

(2) इसी क्रम में उससे बड़े अभाज्य गुणनखंड को चुनकर वह जितनी बार सभी संख्याओं के गुणनखंड में सर्वनिष्ठ हो, उसे भी उतनी ही बार उतार लीजिए ।

(3) इसी प्रकार सभी सर्वनिष्ठ गुणनखंडों को उतार लीजिए ।

(4) सभी का गुणा करके अभीष्ट म0स0 ज्ञात कर लीजिए ।

अतः उपर्युक्त उदाहरण में 48, 64 और 72 का म0स0 = $2 \times 2 \times 2 = 8$

इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं :

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \qquad = 2^4 \times 3$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \qquad = 2^6$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \qquad = 2^3 \times 3^2$

यहाँ 2 की न्यूनतम घात 2^3 ही सर्वनिष्ठ गुणनखंड है ।

अतः म0स0 = $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण 1: 180 एवं 192 का म०स० गुणनखंड-विधि से ज्ञात कीजिए ।

हल: हम देखते हैं कि दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड निम्नवत् हैं :

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

हम देखते हैं कि इन दोनों के गुणनखंडों में 2 कुल दो बार सर्वनिष्ठ है और 3 केवल एक बार ।
अतः अभीष्ट म०स० $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

10.8 भाग-विधि से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना :

इसे निम्नांकित उदाहरणों से समझा जा सकता है :

उदाहरण 2 : 306 तथा 630 का म०स० भाग-विधि से ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ बड़ी संख्या 630 में छोटी संख्या 306 से भाग दिया गया है ।
प्राप्त शेषफल 18 से पुनः प्रथम भाजक 306 में भाग दिया गया है ।
शेषफल शून्य आने पर अंतिम भाजक 18 ही अभीष्ट म०स० होगा ।

```
306) 630(2
    -612
    -------
     18)306(17
       -18
       ---------
         126
        -126
        -------
           0
```

$\therefore$ म०स० = 18

ध्यान दीजिए :

671, 781 और 1441 का म०स० भाग-विधि से ज्ञात कीजिए ।

हल : (i)

```
671) 781(1
    -671
    ------
    110) 671 (6
        -660
        ------
         11) 110 ( 10
             -11
             -----
               0
               0
             -----
               0
```

अतः संख्याओं 671 तथा 781 का म०स० = 11

(ii)

```
11)1441(131
   -11
   ----
    34
   -33
   ----
     11
    -11
    ----
     0
```

अतः तीनों संख्याओं का म०स० = 11

- **ध्यान दें,** दो से अधिक संख्याएँ होने पर किन्हीं दो के म०स० के साथ तीसरी संख्या का म०स० ज्ञात करते हैं। यही क्रिया अगली संख्याओं के साथ भी करते हैं । अंतिम म०स० ही अभीष्ट म०स० होता है ।

उदाहरण 3 : 2052, 3996 और 7380 का म०स० भाग-विधि से ज्ञात कीजिए ।

हल :

```
2052) 3996 (1                    108)7380(68
     -2052                           -648
     ------                          -------
     1944)2052(1                      900
          -1944                      -864
          ------                     -------
          108)1944(18                 36)108(3
              -108                       -108
              ----                       ------
               864                            0
              -864
              -----
                  0
```

∴ 2052, 3996 तथा 7380 तीनों संख्याओं का म०स० = 36

अतः 2052 तथा 3996 का म०स० = 108

आपस में विचार कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

1. दो अभाज्य संख्याओं का म०स० क्या होगा ?
2. दो क्रमागत सम संख्याओं का म०स० क्या होगा ?
3. किन्हीं दो सम संख्याओं का म०स० सम होगा या विषम ?
4. एक सम और एक विषम संख्या का म०स० सम होगा या विषम ?
5. 8 और 12 के समापवर्तक बताइए ।
6. 12 और 16 का म०स० बताइए ।
7. यदि दो संख्याओं का म०स० 6 हो तो बताइए कि 6 का भाग पहली संख्या में देने पर शेषफल क्या मिलेगा ?

अभ्यास 10 (c)

1. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा निम्नांकित संख्याओं के म०स० ज्ञात कीजिए

(i) 144, 198 (ii) 225, 450

(iii) 13, 39, 273 (iv) 120, 144, 204

(v) 101, 909, 1111 (vi) 625, 3125, 15625

2. भाग-विधि द्वारा निम्नांकित संख्याओं का म०स० ज्ञात कीजिए :

(i) 442, 1261 (ii) 935, 1320

(iii) 1624, 522, 1276 (iv) 2241, 8217, 747

3. वह बड़ी से बड़ी संख्या बताइए जिससे 125 और 94 को भाग देने पर प्रत्येक दशा में 1 शेष रहे। [संकेत प्रत्येक संख्या से 1 घटाने पर प्राप्त संख्याओं 124 तथा 93 का म0स0 ही अभीष्ट संख्या होगी ।]

4. वह बड़ी से बड़ी संख्या बताइए जिससे 49, 59 और 109 को भाग देने पर क्रमशः 1, 3 और 5 शेष रहे।

5. निम्नांकित भिन्नों को अंश एवं हर में उनके म0स0 से भाग देते हुए सरलतम रूप में बदलिए :

(i) $\frac{256}{1444}$ (ii) $\frac{286}{468}$ (iii) $\frac{6633}{15075}$

10.9. अपवर्त्य, समापवर्त्य तथा लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest common Multiple or LCM)

निम्नांकित सारणी को देखिए

8 के अपवर्त्य	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, ...
12 के अपवर्त्य	12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...
8 और 12 के समापवर्त्य	24, 48, 72, ...
8 और 12 का लघुत्तम समापवर्त्य	24

यहाँ हम देखते हैं कि 8 और 12 के सार्व अपवर्त्य 24, 48, 72 ... हैं परन्तु लघुत्तम सार्व अपवर्त्य (समापवर्त्य) 24 है । अतः 8 और 12 का लघुत्तम समापवर्त्य 24 है ।

क्रियाकलाप :

- शिक्षक छात्रों को कापी पर 1-100 तक संख्या लिखने को कहेंगे। उदाहरण– 3 के गुणजों पर लाल रंग से निशान लगाने को कहेंगे। इसी प्रकार किसी दूसरी संख्या जैसे - 7 के गुणजों पर काले रंग से निशान लगाने को कहेंगे।
- अब संख्या चार्ट पर जिस संख्या पर सबसे पहले लाल तथा काले दोनों निशान लगे होंगे वह संख्या (3, 7) का ल.स. होगा।

दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं के सबसे छोटा सम या सार्व अपवर्त्य को दी हुई संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य कहते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित सारणी को अपनी अभ्यास पुस्तिका **पर लिख** कर पूरा कीजिए :

14 के अपवर्त्य	
21 के अपवर्त्य	
दोनों के समापवर्त्य	
14 और 21 का लघुत्तम समापवर्त्य	

निष्कर्ष :

संख्याओं के समान अपवर्त्यों को उनका समापवर्त्य कहते हैं ।
संख्याओं के समापवर्त्यों में से सबसे छोटा समापवर्त्य ही उनका लघुत्तम समापवर्त्य (ल0स0) होता है।
संख्याओं का ल0 स0 उन संख्याओं में से प्रत्येक द्वारा पूर्णतः विभाज्य होता है ।

10.9.1. अभाज्य गुणनखंडों द्वारा लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना :

अभाज्य गुणनखंडों द्वारा संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करने की विधि से हम परिचित हैं, जैसे -

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

अतः ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \quad = 48$

इसी प्रकार

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

अतः ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \quad = 2520$

ध्यान दीजिए, लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने हेतु :

1. सर्वप्रथम संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।
2. सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों को देखकर सबसे छोटा गुणनखंड चुनिए । वह जिस किसी संख्या में सबसे अधिक बार आया हो, उसे उतनी ही बार उतार लीजिए ।
3. इसके बाद उससे बड़े अभाज्य गुणनखंड को चुनिए । वह भी जिस किसी संख्या में सबसे अधिक बार आया हो, उसे भी उतनी ही बार उतार लीजिए ।
4. इसी क्रम में सभी गुणनखंडों को उतार कर सभी का गुणा कर ल0स0 ज्ञात कर लीजिए ।

उपर्युक्त उदाहरणों में अभाज्य गुणनखंडों को घात के रूप में भी व्यक्त करके ल0स0 ज्ञात किया जा सकता है। देखिए

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

∴ ल०स० $= 2^4 \times 3 = 48$

तथा 36 $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

40 $= 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

84 $= 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$

∴ ल०स० $= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$

ध्यान दीजिए कि यहाँ ल०स० ज्ञात करने के लिए अभाज्य गुणनखंडों की अधिकतम घातें ली गयी हैं जिनका सर्वनिष्ठ होना आवश्यक नहीं है ।

10.9 2. भाग विधि से लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना :

उदाहरण 4 : 56, 70 और 84 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए ।

हल :

2	56, 70, 84
2	28, 35, 42
7	14, 35, 21
	2, 5, 3

अतः ल०स० $= 2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 5 \times 3$

$= 840$

प्रयास कीजिए :

100, 98 और 77 का ल०स० ज्ञात कीजिए ।

ध्यान दीजिए, भाग-विधि से ल०स० ज्ञात करने हेतु :

- सर्वप्रथम कम से कम दो संख्याओं में उभयनिष्ठ सबसे छोटी अभाज्य संख्या से सभी संख्याओं में भाग देते हुए भागफल उन संख्याओं के ठीक नीचे उतार लेते हैं ।
- जिस संख्या में भाग नहीं जाता है, उसे उसके नीचे यथावत् (ज्यों का त्यों) उतार लेते हैं।
- इस क्रिया को तब तक करते जाते हैं जब तक सभी संख्याओं के नीचे सह-अभाज्य संख्याएँ न आ जाएँ। इस प्रकार प्राप्त सभी भाजक संख्याओं तथा अंतिम पंक्ति की सह-अभाज्य संख्याओं का परस्पर गुणा करके अभीष्ट ल०स० प्राप्त कर लेते हैं ।

उदाहरण 5: 16, 32, और 64 का ल0स0 ज्ञात कीजिए ।

हल :

2	16,	32,	64
2	8	16,	32
2	4,	8,	16
2	2,	4,	8
2	1,	2,	4
	1	1	2

$\therefore$ ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

उदाहरण 6 : 8 और 15 का ल0स0 ज्ञात कीजिए ।

हल : पहली विधि 8 $= 2 \times 2 \times 2$

15 $= 3 \times 5$

$\therefore$ ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

दूसरी विधि

2	8, 15
2	4, 15
2	2, 15
3	1, 15
	1, 5

$\therefore$ ल0स0 $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है :

- **दो या दो से अधिक संख्याओं का ल0स0 उनमें से किसी से भी छोटा नहीं हो सकता । वह उनमें से सबसे बड़ी संख्या के बराबर हो सकता है ।**
- **किन्हीं सह-अभाज्य संख्याओं अथवा अभाज्य संख्याओं का ल0स0 उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है ।**

अभ्यास 10 (d)

1. प्रश्न वाचक चिह्न में उचित संख्या भरिए :

6	18	18
11	77	7
14	?	21

(क) 34 (ख) 42 (ग) 24 (घ) 28

2. निम्नांकित संख्या-युग्मों के ऐसे समापवर्त्य ज्ञात कीजिए जिनका मान 80 से कम हो ।

(क) 9 और 15 (ख) 6 और 10

(ग) 8 और 9 (घ) 7 और 11

3. 60 तक की उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जो 4 और 6 दोनों से पूर्णतः विभाज्य हैं ।

4. निम्नांकित संख्याओं का ल0स0 ज्ञात कीजिए

(क) 5, 10, 15 (ख) 16, 44, 64 (ग) 10, 65, 91

(घ) 22, 121, 418 (ङ) 14, 28, 35, 56

5. वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जो 20, 25 और 40 से पूर्णतः विभाज्य हो ।

[संकेत : अभीष्ट संख्या दी गयी संख्याओं की ल०स० होगी]

6. वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जिसमें यदि 3 जोड़ दें तो योगफल 36, 45 और 50 से अलग-अलग पूरा-पूरा विभाजित हो जाय ।

7. वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जिसमें 75, 80 और 135 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 3 शेष बचे ।

8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 7 घटाने पर शेष बची संख्या 20, 28, 35 और 105 से पूर्णतः विभक्त हो ।

9. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 35, 45 तथा 55 से भाग देने पर क्रमशः 17, 27 तथा 37 शेष बचें ।

[संकेत : ध्यान दें, प्रत्येक भाजक और उसके शेषफल में समान अन्तर 18 है ।

अतः अभीष्ठ संख्या = ल०स०- 18]

10.10. दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य में सम्बन्ध :

आइए तर्क करें और निष्कर्ष निकालें :

प्रथम संख्या	द्वितीय संख्या	म०स०	ल०स०	म०स × ल०स	प्रथम संख्या ×द्वितीय संख्या
6	8	2	24	$2 \times 24 = 48$	$6 \times 8 = 48$
4	9	1	36	$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
30	36	6	180	$6 \times 180 = 1080$	$30 \times 36 = 1080$
35	40	5	280	$5 \times 280 = 1400$	$35 \times 40 = 1400$

यहाँ हम देखते हैं कि उपर्युक्त सारणी में दोनों संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर है ।

निष्कर्ष :

दो संख्याओं की स्थिति में
म०स०× ल०स० = प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या

अतः दो संख्याओं का ल०स० = $\frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{उनका म०स०}}$

किन्हीं दो बड़ी संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करने में उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करना उपयोगी एवं सुगम होता है ।

सोचिए, चर्चा कीजिए :

क्या तीन संख्याओं में यह सम्बन्ध होगा ?

ध्यान दें, दो से अधिक संख्याओं के म0स0 और ल0स0 में यह सम्बन्ध नहीं होता है । जैसे 5, 15 और 20 का ल0स0 = 60 और म0स0 = 5 परन्तु $5 \times 60 \neq 5 \times 15 \times 20$

उदाहरण 7 : 117 और 221 का ल0स0 ज्ञात कीजिए ।

हल :

```
117) 221(1
    -117
   -------
      104) 117 (1
          -104
          -------
              13) 104 (8
                 -104
                 ---------
                    0
```

अतः म0स0 = 13

$$\therefore \text{ ल0स0 } = \frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{उनका म0स0}}$$

$$= \frac{117 \times 221}{13} \qquad = 1989$$

प्रयास कीजिए :

> दो संख्याओं का म0स0 18 तथा ल0स0 504 है। यदि एक संख्या 72 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए ।

हम जानते हैं कि संख्याओं का म0स0 उनमें से प्रत्येक को पूर्णतः विभाजित करता है । इसी प्रकार संख्याओं के ल0स0 में प्रत्येक संख्या का पूरा-पूरा भाग जाता है ।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि

> **दो या अधिक संख्याओं का म0स0 उनके ल0स0 का एक अपवर्तक होता है तथा ल0स0 उनके म0स0 का एक अपवर्त्य होता है ।**

अभ्यास 10 (e)

1. रिक्त भाग में उचित विकल्प भरिए :

15	5	25
12		18

(क) 3 (ख) 6 (ग) 9 (घ) 12

2. निम्नांकित प्रत्येक संख्या-युग्म के लिए दिखाइए कि ल०स० तथा म०स० का गुणनफल संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

(क) 14, 21 (ख) 25, 65 (ग) 32, 96
(घ) 81, 135 (ङ) 15, 125

3. दो संख्याओं का म०स० 16 तथा उनका गुणफल 6400 है । उनका ल०स० ज्ञात कीजिए ।

4. क्या दो संख्याओं का म०स० 14 और उनका ल०स० 204 हो सकता है ? उत्तर की पुष्टि में कारण दीजिए ।

5. 2211 तथा 5025 का म०स० भाग-विधि से ज्ञात करके इसके आधार पर इन संख्याओं का ल०स० ज्ञात कीजिए।

6. 95, 285 और 399 के लघुत्तम समापवर्त्य में इनका महत्तम समापवर्तक कितनी बार सम्मिलित है?

7. 17 वह बड़ी से बड़ी संख्या है जो संख्याओं 102 तथा 187 को पूर्णतः विभाजित करती है । इसके आधार पर वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको ये संख्याएँ पूरा-पूरा विभाजित करती हैं।

10.11 म०स० तथा ल०स० पर आधारित समस्याओं का हल :

दैनिक जीवन की ऐसी बहुत-सी समस्याएँ हैं जिनका हल म०स० अथवा ल०स० पर आधारित होता है । ऐसे कुछ उदाहरण अग्रांकित हैं :

उदाहरण 8: 30 डेसीमीटर लम्बे और 25 डेसीमीटर चौड़े कमरे में वर्गाकार चौके लगाने हैं जिससे कमरे का फर्श पूरा-पूरा ढँक जाए । इन चौकों की न्यूनतम संख्या क्या होगी जबकि कोई भी चौका तोड़ा या काटा नहीं जाता है ?

वर्गाकार चौकोर पत्थरों की न्यूनतम संख्या के लिए यह आवश्यक है कि पत्थर बड़े से बड़े आकार के हों। यह तभी संभव होगा जब पत्थर के वर्गाकार चौके की भुजा कमरे की लम्बाई और चौड़ाई का म०स० हो। इस प्रकार यह एक ऐसी समस्या है जो म०स० ज्ञात करके हल की जा सकती है ।

हल :

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$25 = 5 \times 5$$

अतः म०स० = 5

∴ वर्गाकार चौका की भुजा = 5 डेसीमी

हम जानते हैं कि कमरे के फर्श को पूरा-पूरा ढँकने पर लगाये जाने वाले कुल चौकों का सम्मिलित क्षेत्रफल फर्श के क्षेत्रफल के बराबर होगा ।

फर्श का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 30 डेसीमी × 25 डेसीमी

चौकोर वर्गाकार पत्थर का क्षेत्रफल = 5 डेसीमी × 5 डेसीमी

अतः चौकोर पत्थरों की न्यूनतम संख्या $= \dfrac{30 \text{ डेसीमी} \times 25 \text{ डेसीमी}}{5 \text{ डेसीमी} \times 5 \text{ डेसीमी}}$

= 6 × 5

= 30

उदाहरण 9: एक खेल-प्रशिक्षक खेल के मैदान में बच्चों को 10, 12 या 15 के समूहों में बाँट कर बच्चों को अलग-अलग खेल सामग्री प्रदान करते हैं । इस प्रकार किसी भी दशा में कोई बच्चा छूटता नहीं है। बताइए कि बच्चों की न्यूनतम संख्या क्या होगी ?

[स्पष्ट है कि बच्चों की न्यूनतम संख्या 10, 12 और 15 का ल0स0 होगी । इस प्रकार इस समस्या का हल ल0स0 द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।]

हल :

2	10,	12,	15
3	5,	6,	15
5	5,	2,	5
	1,	2,	1

∴ ल0स0 = 2 × 3 × 5 × 2

= 60

अतः बच्चों की न्यूनतम संख्या = 60

अभ्यास 10 (f)

रिक्त भाग में नीचे दिये गये विकल्पों में से सही विकल्प चुनकर भरिए।

1.

8	24	12
15		35

(क) 45 (ख) 65

(ग) 105 (घ) 100

2.

24	12	60
21		49

(क) 14 (ख) 7

(ग) 21 (घ) 28

3. एक प्राथमिक विद्यालय की कक्षा 1 में 120 और कक्षा 2 में 90 छात्र हैं । इन्हें बड़ी से बड़ी समान छात्र-संख्या में बाँटने पर प्रत्येक समूह में छात्रों की संख्या कितनी होगी ?

4. कापियों की वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 3, 6, 12 व 15 के बण्डलों में अलग-अलग किन्तु बराबर-बराबर बाँटी जा सकें ।

5. 55 मीटर लम्बे और 22 मीटर चौड़े एक मैदान में वर्गाकार दरियाँ बिछानी हैं । एक ही नाप की कम से कम बिछायी जाने वाली दरियों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

6. तीन ग्रह किसी तारे के चारों ओर क्रमशः 200, 250 और 300 दिनों में एक चक्कर लगाते हैं । यदि वे किसी दिन तारे के एक ही ओर एक सीध में हों तो कितने दिनों में पुनः वे उसी स्थिति में आ जायेंगे ।

7. कपड़े के तीन थानों में क्रमशः 125 मी, 220मी, और 275 मी कपड़ा है । बड़ी से बड़ी नाप का फीता बताइए जो तीनों थानों के कपड़ों को पूरा-पूरा नाप सके ।

8. छः घण्टियाँ एक साथ बजनी आरंभ हुईं । यदि वे क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10 और 12 सेकण्ड के अन्तराल से बजती हों तो 30 मिनट में वे कितनी बार इकट्ठी बजेंगी ?

9. एक टोकरी के आमों को एक बालिका 4, 6 और 9 की ढेरियों में सजाती है । प्रत्येक बार 1 आम टोकरी में शेष बच जाता है । बताइए कि टोकरी में कम से कम कितने आम हैं ?

   [संकेत ल0स0 = 36, इसमें 1 जोड़ने पर टोकरी में आमों की न्यूनतम संख्या ज्ञात हो जायेगी ।]

10. चार पहियों की परिधियाँ क्रमशः 50 सेमी, 60 सेमी, 90सेमी और 100 सेमी लम्बी हैं । कम से कम कितनी दूरी चलने में चारों पहिए साथ-साथ पूरे-पूरे चक्कर लगायेंगे ?

11. एक व्यापारी हर चौथे दिन कानपुर जाता है जबकि दूसरा व्यापारी हर दसवें दिन। वे दोनों यदि 3 जनवरी को कानपुर एक साथ गये हों तो अगली तिथि बताइए जब वे पुनः एक साथ कानपुर जायेंगे।

दक्षता अभ्यास-10

1. निम्नलिखित में सत्य / असत्य कथन अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए ।
   (i) दो संख्याओं का गुणनफल उनके ल0स0 और म0स0 के गुणनफल से छोटा होता है ।
   (ii) यदि कोई संख्या किन्हीं दो संख्याओं से अलग-अलग पूर्णतः विभाज्य हो तो वह उनके गुणनफल से भी सदैव पूर्णतः विभाज्य होगी ।
   (iii) एक भाज्य तथा दूसरी अभाज्य संख्याएँ आपस में सह-अभाज्य हो सकती हैं ।
   (iv) अभाज्य संख्याएँ सह-अभाज्य भी होती हैं ।
   (v) किसी संख्या का इकाई का अंक विषम हो तो वह 2 से विभाज्य होती है ।
   (vi) 724 में 4 का पूरा-पूरा भाग जाता है ।
   (vii) एक संख्या 12 से विभाज्य है तो वह 3 से भी विभाज्य होगी ।
   (viii) दी गई संख्याओं का ल0स0 उनमें से सबसे बड़ी संख्या से छोटा नहीं हो सकता ।

(ix) किन्हीं संख्याओं का ल०स० उनके म०स० का अपवर्त्य नहीं होता है ।

(x) सह-अभाज्य संख्याओं का म०स० 1 होता है ।

2. निम्नांकित के प्रथम पाँच अपवर्त्य लिखिए :

(i) 13 (ii) 23 (iii) 26 (iv) 40

3. निम्नांकित में से 15 किसका अपवर्तक है :

(i) 3125 (ii) 122940 (iii) 151290

4. 5904 और 4848 का म०स० ज्ञात कीजिए ।

5. चार छात्र एक मैदान के चारों ओर दौड़ लगाते हैं । वे क्रमशः 30 सेकेण्ड, 40 सेकेण्ड, 50 सेकेण्ड और 60 सेकेण्ड में मैदान का पूरा चक्कर लगाते हैं । यदि वे मैदान के किसी बिन्दु से एक साथ दौड़ना प्रारम्भ करें तो बताइए कि कम से कम कितने समय पश्चात् वे उसी बिन्दु पर पुनः मिलेंगे ।

6. दो संख्याओं का म०स० 35 और उनका ल०स० 525 है । उनमें एक संख्या 175 है तो दूसरी संख्या निम्नांकित में से कौन-सी होगी ?

(i) 25 (ii) 49 (iii) 63 (iv) 105

7. दो टंकियों में क्रमशः 72 ली तथा 116 ली दूध भरा है । बड़ी से बड़ी धारिता का बरतन बताइए जिससे दोनों टंकियों के दूध को पूरा-पूरा नापा जा सके ।

8. एक कमरे का फर्श 300 सेमी × 425 सेमी नाप का है । उसमें बड़ी से बड़ी किस नाप की वर्गाकार टाइल लगाई जा सकती हैं ताकि टाइलों की संख्या कम से कम रहे ?

9. तीन हौजों में क्रमशः 330, 375 और 450 लीटर पानी भरा है । बड़े से बड़े पीपे की धारिता बताइए जिससे इन हौजों के पानी को पूरी-पूरी बार में निकाला जा सके ।

10. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 804 तथा 1745 को भाग देने पर क्रमशः 5 तथा 6 शेष बचे ।

(संकेत : 804—5 =799 और 1745- 6 = 1739 का म०स० ही अभीष्ट संख्या होगी ।)

11. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 590, 908 तथा 1014 को भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे ।

संकेत : 908 - 590 = 318 और 1014 - 908 = 106 का म०स० ही अभीष्ट संख्या होगी।

12. उत्तर का सही विकल्प छाँटिए

(क) तीन संख्याएँ 1 : 2 : 3 के अनुपात में हैं । यदि उनका म०स० 12 है तो ये संख्याएँ हैं ?

(i) 12, 24, 36 (ii) 10, 20, 30 (iii) 5, 10, 15 (iv) 4, 8, 12

(ख) तीन लकड़ी के लट्ठे क्रमशः 36 मी, 45 मी तथा 63 मी लम्बे हैं । इन्हें बराबर लम्बाई के छोटे-छोटे गुटकों में बाँटना है । प्रत्येक गुटके की अधिकतम लम्बाई है ?

(i) 9 मी (ii) 18 मी (iii) 51 मी (iv) 4.5 मी

(ग) नापने की तीन छड़ें क्रमशः 64 सेमी, 80 सेमी तथा 96 सेमी लम्बी हैं । इनमें से कोई भी छड़ प्रयोग करके कम से कम किस लम्बाई का कपड़ा पूर्ण रूप से नापा जा सकता है ।

(i) 0.96 मी (ii) 19.20 मी (iii) 9.60 मी (iv) 96 मी

13. तीन विभिन्न चौराहों पर यातायात की बत्तियाँ क्रमशः 48 सेकेण्ड, 72 सेकेण्ड और 108 सेकेण्ड के बाद बदलती हैं। यदि वे 8 बजकर 20 मिनट पर एक साथ बदलें तो पुनः एक साथ कब बदलेंगी?

14. एक आयत का क्षेत्रफल 56 वर्ग सेमी है । पूर्णांकों में उसकी लम्बाई और चौड़ाई क्या-क्या हो सकती है ?

विशेष प्रश्न

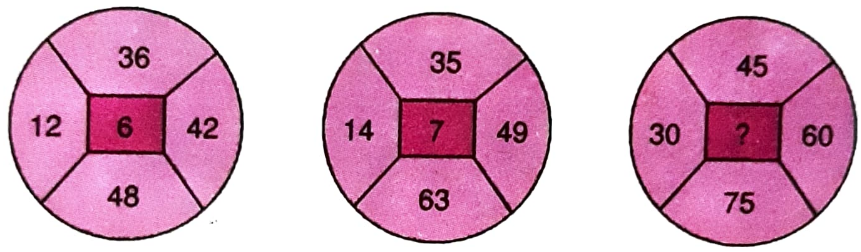
1. नारियल के एक ढेर को 2, 3 और 5 के समूह में विभक्त किया गया है, प्रत्येक दशा में एक नारियल बच जाता है, ढेर में लघुतम नारियल की संख्या है :

(i) 31 (ii) 41 (iii) 51 (iv) 61

उ. 31 (एन.टी.एस. 2006)

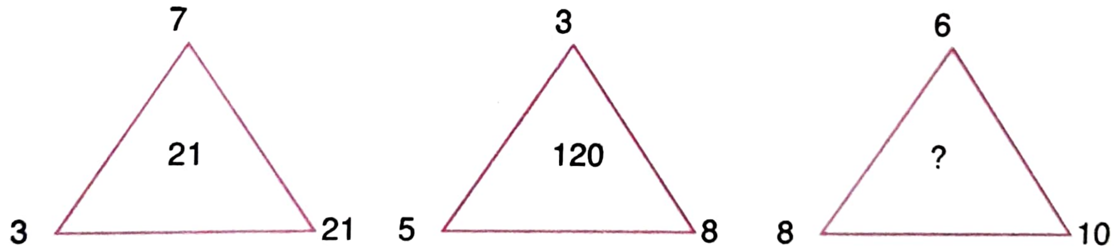
निर्देश : प्रश्न में संख्याएँ एक विशेष नियम से चित्रों में दी गई हैं। एक संख्या का स्थान रिक्त है जिसे (?) से दर्शाया गया है। रिक्त स्थान के लिए दिये गये पाँच विकल्पों में से सही विकल्प लिखिए

2.



(i) 12 (ii) 15 (iii) 18 (iv) 21 (v) 24 **उ.15**

3.



(i) 8 (ii) 10 (iii) 21 (iv) 120 (v) 100 **उ.120**

इस इकाई में हमने सीखा

1. गुणनखंड (अपवर्तक) और गुणज (अपवर्त्य) की पहचान कैसे कर सकते हैं ?

(i) किसी संख्या का अपवर्तक उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है ।

(ii) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक अपवर्तक होती है ।

(iii) 1 प्रत्येक संख्या का अपवर्तक होता है ।

(iv) किसी संख्या का प्रत्येक अपवर्तक उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है ।

(v) प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक अपवर्तक का एक गुणज होती है ।

(vi) किसी संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है ।

(vii) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है ।

2. भाज्य-अभाज्य संख्याओं की पहचान कैसे करें ?

(i) वह संख्या जिसके दो ही अपवर्तक 1 और स्वयं संख्या ही होते है, अभाज्य संख्या कहलाती है। जिन संख्यओं के दो से अधिक अपवर्तक होते हैं, वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं ।

(ii) दो संख्याएँ जिनका सार्व अपवर्तक केवल 1 हो, सह-अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं ।

(iii) यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाज्य है तो वह दूसरी संख्या के प्रत्येक अपवर्तक से भी विभाजित होगी ।

(iv) वह संख्या जो दो सह-अभाज्यों से विभाजित होती है, उनके गुणनफल से भी विभाज्य होगी ।

3. (i) दो या अधिक संख्याओं का म०स० (HCF) उनके सार्व अपवर्तकों में से सबसे बड़ा होता है।

(ii) दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. या तो सबसे छोटी संख्या के बराबर होता है अथवा सभी संख्याओं से छोटा होता है।

(iii) दो या अधिक संख्याओं का ल०स० (LCM) उनके सार्व गुणजों में से सबसे छोटा होता है।

(iv) दो या दो से अधिक संख्याओं का ल०स० उनमें से किसी से भी छोटा नहीं हो सकता । वह उनमें से सबसे बड़ी संख्या के बराबर हो सकता है ।

(v) किन्हीं सह-अभाज्य संख्याओं अथवा अभाज्य संख्याओं का ल०स० उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है ।

(vi) दो संख्याओं की स्थिति में म०स० × ल०स० = प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या ।

उत्तरमाला

अभ्यास 10 (a)

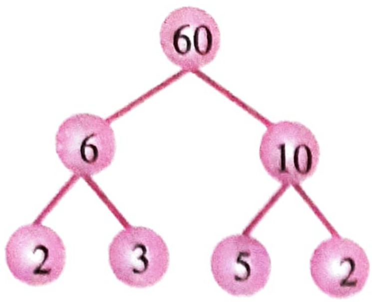
1. (1) ग, (2) ङ, (3) घ, (4) क, (5) ख, **2.** (क) 3, 6, 9, 12, 15 (ख) 4, 8, 12, 16, 20 (ग) 5, 10, 15, 20, 25 (घ) 9, 18, 27, 36, 45 **3.** (1) (घ), (2) (ङ), (3) (ख), (4) (ग), (5) (क) **4.** 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98; **5.** 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496.

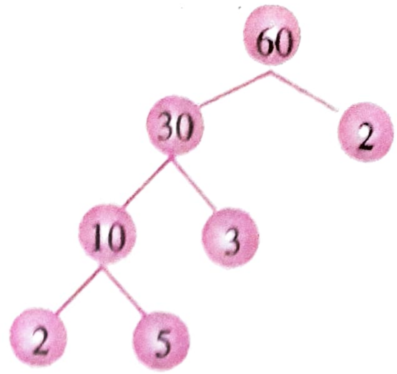
(सभी गुणनखण्डों का योग 992 (अर्थात 2 × 496 = 992) संख्या का दुगना है इसलिए यह एक सम्पूर्ण संख्या है।

6. (1) स्वयं, अपवर्तक (2) अपवर्तक, (3) छोटा, बराबर, (4) अपवर्त्य, (5) 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78

अभ्यास 10 (b)

1. 3 × 3; **2.** 12; **3.** 2 × 2 × 2 × 3;

4. 



5. 9999; अभाज्य गुणनखण्ड 3 × 3 × 11 × 101; 6. 10000; 2 × 2 × 2 × 2 × 5 × 5 × 5 × 5; 7. 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3; 8. 2 × 2 × 2 × 2 × 7; 2 × 2 × 2 × 3 × 5; 3 × 3 × 3 × 5; 2 × 2 × 5 × 7; 2 × 3 × 5 × 5; 2 × 2 × 307; 9. (iv) 10. (1) भाज्य संख्या, (2) अभाज्य संख्या, (3) भाज्य, अभाज्य, (4) 7

अभ्यास 10 (c)

1. (i) 18, (ii) 225, (iii) 13, (iv) 12, (v) 101, (vi) 625; 2. (i) 13, (ii) 55, (iii) 58, (iv) 747, 3. 31; 4. 8, 5. (i) $\frac{64}{361}$, (ii) $\frac{11}{18}$, (iii) $\frac{11}{25}$.

अभ्यास 10 (d)

1. 42; 2. (क) 45, (ख) 30, 60, (ग) 72, (घ) 77; 3. 12, 24, 36, 48, 60; 4. (क) 30, (ख) 704, (ग) 910, (घ) 4598 (ङ) 280; 5. 200; 6. 897; 7. 10803; 8. 427; 9. 3447.

अभ्यास 10 (e)

1. 6; 2. (क) 14 × 21 = 7 × 42, (ख) 25 × 65 = 5 × 325, (ग) 32 × 96 = 32 × 96, (घ) 81×135=27× 405, (ङ) 15 × 125 = 5 × 375; 3. 400; 4. नहीं, क्योंकि 14 से 204 पूर्णतः विभाज्य नहीं है; 5. म०स० 201, ल०स० 55275; 6. 105 बार; 7. 1122

अभ्यास 10 (f)

1. 105; 2. 7; 3. 30; 4. 60; 5. 10; 6. 3000 दिन; 7. 5 मी; 8. 15 बार; 9. 37 आम; 10. 9 मी; 11. 23 जनवरी

दक्षता अभ्यास 10

1. (i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य, (vi) सत्य, (vii) सत्य, (viii) सत्य, (ix) असत्य, (x) सत्य; 2. (i) 13, 26, 39, 52, 65; (ii) 23, 46, 69, 92, 115; (iii) 26, 52, 78, 104, 130; (iv) 40, 80, 120, 160, 200; 3. (ii) 122940, (iii) 151290; 4. 48; 5. 600सेकण्ड या 10 मिनट; 6. (iv) 105; 7. 4 लीटर; 8. 25 सेमी × 25 सेमी; 9. 15 लीटर; 10. 47; 11. 106; 12. (क) (i) 12, 24, 36; (ख) (i) 9 मी, (ग) (iii) 9.60 मी; 13. 8 बजकर 27 मिनट 12 सेकण्ड; 14. 1 सेमी × 56 सेमी, 2 सेमी × 28 सेमी, 4 सेमी × 14 सेमी, 7 सेमी × 8 सेमी