



- ❖ व्यंजक की अवधारणा
- ❖ व्यंजकों के पद, पदों के गुणनखण्ड एवं गुणांक
- ❖ सजातीय और विजातीय पद
- ❖ व्यंजको की डिग्री
- ❖ एक, दो एवं त्रिपदीय व्यंजकों की अवधारणा
- ❖ बीजीय व्यंजकों का जोड़ एवं घटाना
- ❖ बीजीय व्यंजकों का मान ज्ञात करना
- ❖ कोष्ठकों का प्रयोग

6.1 भूमिका

पिछली इकाई में हमने देखा कि बीजगणित में अज्ञात संख्याओं के स्थान पर अक्षरों का प्रयोग किया जाता है। प्राचीन भारत में गणितज्ञों ने राशियों के लिए प्रतीकों का प्रयोग किये हैं। उनके पास अज्ञात राशियों को प्रदर्शित करने के लिए यावत् - तावत्, वर्ण, बीज आदि कई शब्द थे। ईसा से 300 पूर्व अक्षरों और उनकी घातों का प्रयोग बहुत ही प्रचलित था। महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, महावीर, श्रीधर, भास्कराचार्य इत्यादि ने बीजगणित के अध्ययन में बहुत योगदान दिया है, भास्कर की "लीलावती" नामक रचना में दी गयी समस्याएँ बीजगणित के अद्भुत उदाहरण हैं। बीजगणित में वर्णों, प्रतीकों पर संक्रियाओं का प्रयोग सहजता से किया जाता है। बीजगणित दैनिक एवं जटिल गणितीय समस्याओं को हल करने में अति उपयोगी रहता है। संख्याओं की भांति अक्षर संख्याओं के गुणा को उनके घातांकीय रूप में व्यक्त किया जा सकता है। हमने चर एवं अचर संख्याओं का भेद करना भी समझ लिया है। अब इस इकाई में हम आंकिक संख्याओं और अक्षर संख्याओं पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ कर बीजगणितीय व्यंजकों (संक्षेप में बीजीय व्यंजकों) को बनाना सीखेंगे तथा बीजीय व्यंजकों के पद, उनके गुणांक, सजातीय एवं विजातीय पद, एकपदीय, द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजक, बीजीय व्यंजकों के मान, बीजीय व्यंजकों का जोड़-घटाना और कोष्ठकों के प्रयोग के विषय में पढ़ेंगे।

6.2 व्यंजक की अवधारणा

शिक्षक छात्रों से एक थैले में बिना देखे कुछ वस्तुएँ मिलाने को कहेगा तथा अब थैले में उपस्थित वस्तुएँ ज्ञात करने को कहेंगे तथा चर और अचर राशियों पर दैनिक जीवन के उदाहरणों का प्रयोग करते हुए गणितीय संक्रियाओं द्वारा व्यंजक निर्माण करना सिखायेंगे।

आइए हम जाने कि ये व्यंजक किस प्रकार बनते हैं।

1. व्यंजक $x+5$ को x और 5 के योग से प्राप्त किया गया है।

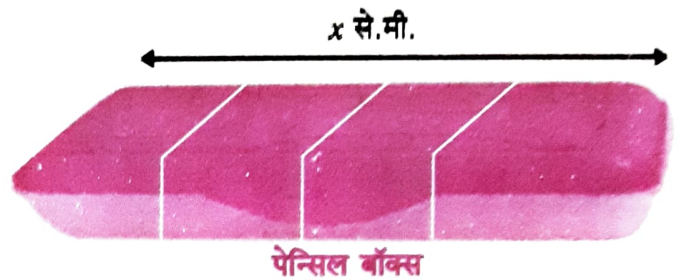
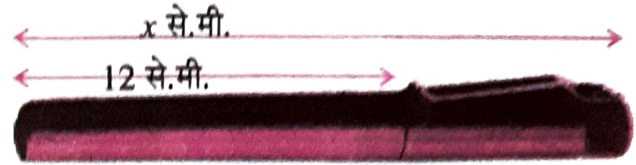
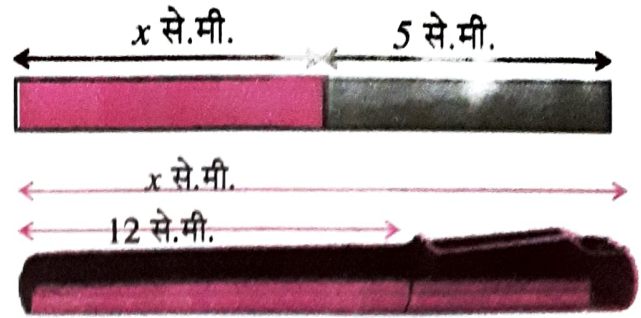
छड़ की लम्बाई = $(x+5)$ सेमी

2. व्यंजक $x-12$ को x से 12 को घटाने से प्राप्त किया गया है। कलम के ढक्कन की लम्बाई = $(x-12)$ सेमी

3. एक रबर का मूल्य ₹ 2 है, तो x रबर का मूल्य 2 और x के गुणा से प्राप्त ₹ $2x$ होगा।

4. व्यंजक $\frac{x}{4}$ को x में 4 से भाग देकर प्राप्त किया गया है।

बाक्स के प्रत्येक समान भाग की लम्बाई = $\frac{x}{4}$ सेमी



प्रयास कीजिए

बताइए कि निम्नांकित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किये जाते हैं :

(1) x और 7 का योगफल,

(2) x को 5 से गुणा करने पर गुणनफल

(3) a और b के योग का 3 गुना

(4) a का 4 गुना और b का योगफल।

कोई अक्षर या अक्षर संख्या या इनका समूह मौलिक गणितीय संक्रियाओं के धिहनों से युक्त होने पर बीजीय व्यंजक कहलाता है।

6.3 व्यंजकों के पद

1. $5x^2 + 7xy - 1$ एक व्यंजक है जिसमें x तथा y अक्षर हैं तथा 5, 7, -1 अक्षर हैं। यह $5x^2$, $7xy$ तथा -1 के योग से बना है जहाँ व्यंजक $5x^2 = 5 \times x \times x$ तथा $7xy = 7 \times x \times y$ ।
2. $5p^2q - 4pq^2 + 7$ एक व्यंजक है जिसमें p और q अक्षर हैं तथा 5, -4 और 7 अक्षर हैं। यह व्यंजक $5p^2q$, $-4pq^2$ तथा 7 के योग से बना है जहाँ $5p^2q = 5 \times p \times p \times q$ तथा $-4 \times p \times q \times q = -4pq^2$ यहाँ हम देखते हैं कि उपर्युक्त व्यंजक क्रमशः व्यंजकों $5x^2, 7xy, -1$ तथा $5p^2q, -4pq^2, 7$ के योगफल से बने हैं। ये व्यंजकों के खंड हैं जिन्हें मूल व्यंजक के पद कहते हैं।

किसी आंकिक संख्या या अक्षर संख्या या इनके गुणनफल या भागफल को पद कहते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित व्यंजकों में पदों को छाँटिए :

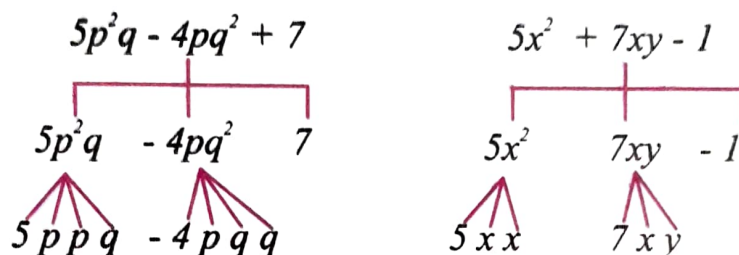
$$2x^2 + 3xy, 3x^2y + 5y - z \text{ और } 5x^2y - 4xy^2 + 3$$

एक पद के गुणनखंड

हम पढ़ चुके हैं कि $5x^2 + 7xy - 1$ के मूल पद $5x^2$, $7xy$ और -1 हैं। पद $5x^2$; 5 , x और x का गुणनफल है या 5 , x और x पद $5x^2$ के गुणनखंड हैं। प्रत्येक पद अपने गुणनखंडों का गुणनफल होता है। पद $7xy$; 7 , x और y का गुणनफल है और पद -1 अचर है। हम एक व्यंजक के पदों को तथा पदों के गुणनखंडों को एक व्यंजक पेड़ आरेख (Tree diagram) द्वारा आकर्षक रूप में निरूपित कर सकते हैं।

यहाँ व्यंजक $5p^2q - 4pq^2 + 7$ और व्यंजक $5x^2 + 7xy - 1$ को पेड़ आरेख द्वारा दर्शाया गया है :

पेड़ आरेख



प्रयास कीजिए :

- व्यंजकों $ax^2 + bx + c$ और $ax^2 + 2hxy + by^2$ के पद लिखिए तथा इनके वृक्ष आरेख खींचिए।
- तीन व्यंजक लिखिए जिनमेंसे प्रत्येक में चार पद हों।

6.4 पद के गुणांक

हम जान चुके हैं कि पद को गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। इसमें से एक गुणनखंड संख्यात्मक (numerical) हो सकता है तथा अन्य बीजीय (algebraic) हो सकते हैं। इस संख्यात्मक गुणनखंड को पद का संख्यात्मक गुणांक (numerical coefficient) या केवल गुणांक कहते हैं। इसे शेष बीजीय पद का गुणांक भी कहते हैं। इस प्रकार $5xy$ में xy का गुणांक 5 है। पद $7xyz$ में xyz का गुणांक 7 है तथा $-8xy^2$ में xy^2 का गुणांक -8 है। विशेष ध्यान देना है कि गुणांक $+1$ होने पर लिखते समय $(+1)$ छोड़ दिया जाता है। और (-1) को केवल $(-)$ से दर्शाया जाता है। इस प्रकार $+1x$ को x और $(-1)x$ को $-x$ लिखते हैं।

कभी कभी गुणांक का प्रयोग व्यापक रूप में किया जाता है। उदाहरणार्थ पद $5xy$ में xy का गुणांक 5 है, $5y$ का गुणांक x है तथा $5x$ का गुणांक y है। पद $10xy^2$ में xy^2 का गुणांक 10 है। $10y^2$ का गुणांक x है तथा $10x$ का गुणांक y^2 है। इसे शेष गुणनखंडों के गुणनफल का गुणांक कहा जाता है।

प्रयास कीजिए

व्यंजक $6x^2 + 9xy + 10y^2$ और $p^2 + pq - q^2$ के पदों में संख्यात्मक गुणांक लिखिए।

अभ्यास 6 (a)

निम्नलिखित व्यंजकों के पदों को लिखिए :

1. $5x + 6$
2. $a^2 - 3ab - 4$
3. $4ax + 6$
4. $x^2 - 3x - 7$
5. $5a - b$
6. xy^2
7. xyz में xyz का गुणांक..... है
8. $-3y^2$ में y^2 का गुणांक है
9. $\frac{-2}{3}xy^2$ में $\frac{-2}{3}$ का गुणांक है
10. निम्नांकित कथन सत्य हैं या असत्य ?

- (i) $8x^2y$ में x^2y का गुणांक 8 है।
- (ii) $\frac{1}{6}xyz^2$ में xyz^2 का गुणांक 1 है।

6.5 समान (सजातीय) (like terms) तथा असमान (विजातीय) (unlike terms) पद

व्यंजक $2xy - 3x + 5xy - 4$ में पद $2xy$ और $5xy$ को देखिए। $2xy$ के गुणनखंड 2, x और y तथा $5xy$ के गुणनखंड 5, x और y हैं। इस प्रकार इनके बीजीय (चर) गुणनखंड एक समान हैं इसलिए ये समान (सजातीय) पद हैं। अतः एक ही व्यंजक में सजातीय पद होने पर सजातीय पदों को जोड़कर सरल किया जा सकता है।

- जिन पदों के बीजीय गुणनखंड आपस में समान होते हैं, उन्हें **सजातीय पद या समान पद (like terms)** कहते हैं, जबकि उनके संख्यात्मक गुणांक अलग-अलग हो सकते हैं।

पुनः $2xy - 3x + 5xy - 4$ में पद $2xy$ और $-3x$ में भिन्न - भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं। इसलिए ये असमान (विजातीय) पद हैं। इसी प्रकार पद $2xy$ और 4 तथा $-3x$ एवं 4 भी असमान पद हैं।

- जिन पदों के बीजीय गुणांक आपस में समान नहीं होते हैं, उन्हें **विजातीय पद या असमान पद (unlike terms)** कहते हैं।

क्रियाकलाप

शिक्षक फ्लैश कार्ड पर विभिन्न प्रकार के चर और अचर राशियाँ लिखकर लायेंगे तथा बच्चों से समान प्रकार के चर-अचर को छाँटने को कहेगा एवं सजातीय और विजातीय पदों में अन्तर स्पष्ट करेंगे और व्यंजकों में पदों की गणना करने के लिए प्रोत्साहित करेंगे।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित पदों में सजातीय एवं विजातीय पदों को विभक्त कीजिए -

$$10x, -8y, 5, 6xy, -12, x^2, 5y, -11xy, -9x, 1, x, y, xy$$

उदाहरण : निम्नलिखित युग्मों में समान पद और असमान पद वाले युग्मों को छाँटिए।

- (i) $6x, 7y$ (ii) $13x, -7x$ (iii) $-5ab, 7ba$
(iv) $3x, 6xy$ (v) $6pq^2, 7p^2q$ (vi) $7py^2, -4py^2$
(vii) $mn^2, 9mn$ (viii) $-p, 10p$

- हल : (i) दोनों के चर भिन्न हैं, इसलिए यह युग्म परस्पर असमान है।
(ii) दोनों के चर समान हैं इसलिए यह युग्म समान है।
(iii) $-5ab, 7ba$ दोनों के चर समान हैं क्योंकि $ab = ba$ इसलिए यह युग्म समान है।
(iv) $3x, 6xy$ दोनों के चर भिन्न हैं इसलिए यह युग्म परस्पर असमान है।
(v) $6pq^2, 7p^2q$ दोनों के बीजीय भाग भिन्न हैं, इसलिए यह युग्म परस्पर असमान है।
(vi) $7py^2, -4py^2$ दोनों के बीजीय भाग समान हैं। इसलिए यह युग्म समान है।
(vii) $mn^2, 9mn$ में दोनों के बीजीय भाग भिन्न हैं। इसलिए यह युग्म परस्पर असमान है।
(viii) $-p, 10p$ दोनों के चर समान हैं। इसलिए यह युग्म परस्पर समान है।

ध्यान दें

समान पद और असमान पद को जानने के लिए गुणांकों पर ध्यान न देकर केवल पद के बीजीय भाग पर ध्यान केन्द्रित करते हैं।

अभ्यास 6 (b)

1. निम्नलिखित में सजातीय पद छाँटिए।

(i) $6x^2y, -6xyz, 8x^2y, -7xyz$

(ii) $-3pq, -5pq^2, 4q^2p, 9qp$

2. निम्नलिखित में सजातीय युग्मों पर सही ($\sqrt{\quad}$) लगाइए।

(i) $5x, -3x$

(ii) $3ab, 7a^2$

(iii) b^2ac, ab^2c

(iv) a^2bc, ab^2c

6.6 व्यंजकों की डिग्री

किसी भी व्यंजक की डिग्री एक ऋणेत्तर पूर्णांक (non negative integer) होती है। साथ ही साथ व्यंजक की डिग्री उस व्यंजक में प्रयुक्त चर की उच्चतम घात होती है। अर्थात् व्यंजक में पदों की भी डिग्री होती है। जैसे $3x^2 + 5x + 1$ में व्यंजक की डिग्री 2 है, जबकि पदों $3x^2$, $5x$ तथा 1 की डिग्री क्रमशः 2, 1 तथा 0 है।

6.7 एक पदी, द्विपद, त्रिपद व्यंजक

हमने व्यंजक के पदों के सम्बन्ध में पढ़ लिया है, वह बीजीय व्यंजक जिसमें केवल एक पद हो, एक पदी (Monomial) व्यंजक कहलाता है, जैसे $5x, -xy, 4z^2, 7$ इत्यादि। वह व्यंजक जिसमें केवल दो पद हों और वे असमान पद हों, द्विपद कहलाता है। उदाहरणार्थ $3x + 2m, m - 5, xy + 4z, a^2 - b^2$ द्विपद हैं। ध्यान रहे $9pq$ व्यंजक द्विपद नहीं है, यह एक पदी है। व्यंजक $x^2 + 2hxy + y^2$ में तीन असमान पद हैं, इसलिए इसे त्रिपद (Trinomial) कहते हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नांकित व्यंजकों को एक पदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए:

$xyz, x + y + z, 5p^2 + 6pq + 7, 5x, x^2 - y^2, a + b, -x,$

$3z, 4mn + 3, a + 5b - c, mn - 5, x^2 + xy + 3y^2, 7 + 6pq$

अभ्यास 6 (C)

1. निम्नलिखित व्यंजकों में पदों की संख्या बताइए :

(i) $13x$ (ii) $x + y$ (iii) $ax^2 - bx + c$ (iv) $3x - 5z$

2. निम्नलिखित व्यंजकों की डिग्री और उनके पदों की डिग्री बताइए

(i) $x^2 + 2y + 3$

(ii) $3x^3 + 4x^2y$

(iii) $5x^4 + 7xy^2 + 2x + 3$

(iv) $y^2 + 5$

3. निम्नांकित में सत्य कथन बताइए :

(i) $5x^2yz$ द्विपद व्यंजक है,

(ii) $x^2 - 8x + 10$ द्विपद व्यंजक है

(iii) $2x^2 + 7xy$ द्विपद व्यंजक है,

(iv) $ax^2 + bx - c$ द्विपद व्यंजक है,

4. निम्नांकित में एकपदीय, द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजक बताइए :

(i) $3xy+7$

(ii) $15x^3$

(iii) $2x^2+7x-3$

(iv) $3x^2-10xy$

(v) px^2+qx-r

5. $x^2y-7xy+10$ पदों की संख्या की दृष्टि से कैसा व्यंजक है ?

6. नसरीन के पास $3x$ आम हैं। उसने $2y$ आम अपनी बहन एबीना को दे दिया। ज्ञात कीजिए:

(i) नसरीन के पास कितने आम शेष रहे ?

(ii) शेष आमों की संख्या में कितने पद हैं ?

(iii) पदों की संख्या की दृष्टि से इसे किस प्रकार का व्यंजक कहेंगे ?

6.8 बीजीय व्यंजकों का जोड़ एवं घटाना :

आइए इसे समझने के लिए कुछ समस्याओं पर विचार करें।

1. डेविड, शालू और सलीम साथ साथ खेलते हैं, खेल खेल में डेविड शालू से कहता है कि तुम्हारे पास सलीम से 12 गोलियाँ अधिक हैं और मेरे पास तुम दोनों की गोलियों से 5 गोलियाँ अधिक हैं। डेविड के गोलियों की संख्या कैसे ज्ञात करेंगे ?

♦ चूँकि यहाँ सलीम के पास गोलियों की संख्या ज्ञात नहीं है, इसलिए हम यहाँ सलीम की गोलियों की संख्या x मान लेते हैं, अब शालू के पास सलीम से 12 गोलियाँ अधिक हैं, इसलिए शालू के गोलियों की संख्या $x+12$ होगी, पुनः डेविड के पास दोनों की गोलियों के योग $[x+(x+12)]$ से 5 अधिक हैं।

इसलिए डेविड की गोलियों की संख्या $= x + x + 12 + 5 = 2x + 17$

2. राहुल के पिता की वर्तमान आयु राहुल की आयु की चार गुनी है। उसके चाचा की आयु उसके पिता की आयु और उसकी आयु के योग से 6 वर्ष कम है। आप राहुल के चाचा की आयु किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

♦ चूँकि राहुल की आयु ज्ञात नहीं है, इसलिए मान लें कि राहुल की वर्तमान आयु y वर्ष है। अब उसके पिता की आयु $4y$ है। अब राहुल के चाचा की उम्र ज्ञात करने के लिए राहुल और उसके पिता की आयु का योग $(y + 4y)$ ज्ञात कर उसमें 6 वर्ष कम कर (घटा) देते हैं।

इसलिए राहुल के चाचा की आयु $= y + 4y - 6 = 5y - 6$ वर्ष

इसप्रकार हम देखते हैं कि हमारे दैनिक जीवन में अनेक ऐसी स्थितियाँ हमारे सामने आती हैं, जहाँ व्यंजकों का प्रयोग कर उन पर अंकगणित की संक्रियाएँ करनी पड़ती हैं।

प्रयास कीजिए

दो स्थितियों को लिखिए जिनमें से दो बीजीय व्यंजकों को बनाने की आवश्यकता पड़े तथा उन्हें जोड़ना या घटाना पड़े।

6.8.1 समान पदों को जोड़ना या घटाना

हम लोगों ने इस अध्याय में समान पदों की पहचान करना सीख लिया है। अब हम यहाँ पर समान पदों का जोड़ना और घटाना सीखेंगे।

♦ आइए $5x$, $7x$ को जोड़ें। हम जानते हैं कि x एक बीजीय संख्या है। इसलिए $5x$ और $7x$ समानपदीय संख्याएँ हैं।

$$\therefore 5x + 7x = (5 + 7)x = 12x$$

♦ इसीप्रकार $6xy$, $7xy$ और xy को जोड़ें।

$$\begin{aligned} 6xy + 7xy + xy &= (6 + 7 + 1)xy \\ &= 14xy \end{aligned}$$

♦ $10mn$ में से $5mn$ को घटाएँ।

$$\begin{aligned} 10mn - 5mn &= (10 - 5)mn \\ &= 5mn \end{aligned}$$

♦ $7pq^2$ में से $3pq^2$ घटाएँ।

$$\begin{aligned} 7pq^2 - 3pq^2 &= (7 - 3)pq^2 \\ &= 4pq^2 \end{aligned}$$

इस प्रकार, दो या अधिक समान पदों का योग एक समान पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक सभी समान पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।

अब हमलोग समान बीजीय पदों को जोड़ने और घटाने की प्रक्रिया से परिचित हो चुके हैं। आइए कुछ उदाहरणों द्वारा व्यापक बीजीय व्यंजकों को जोड़ने की प्रक्रिया को जानें।

♦ $3a + 7$ और $8a - 5$ को जोड़िए।

$$\text{योग} = 3a + 7 + 8a - 5$$

यहाँ $3a$ और $8a$ समान पद हैं इसी प्रकार 7 और -5 समान पद हैं।

$$\begin{aligned} &= 3a + 8a + 7 + (-5) \\ &= (3 + 8)a + 7 - 5 \\ &= 11a + 2 \end{aligned}$$

अतः $3a + 7 + 8a - 5$

$= 11a + 2$

- ♦ $3x^2 + 5xy + 7y$ और $2xy - 5y$ को जोड़िए।

♦ योग $= 3x^2 + 5xy + 7y + 2xy - 5y$
 $= 3x^2 + 5xy + 2xy + 7y - 5y$ (पदों को व्यवस्थित करने पर)
 $= 3x^2 + (5 + 2)xy + (7 - 5)y$ समान पदों को साथ लेते हैं तथा असमान पद $3x^2$ को यथावत् रखते हैं
 $= 3x^2 + 7xy + 2y$

- ♦ $4x - y + 5z$ में से $x - y$ को घटाइए।

अन्तर $= 4x - y + 5z - (x - y)$
 $= 4x - y + 5z - x + y$
 $= (4 - 1)x + (-1 + 1)y + 5z$
 $= 3x + 0y + 5z$
 $= 3x + 5z$

ध्यान दें $-(x - y) = -x + y$
 कोष्ठक के नियमानुसार

उदाहरण 1: व्यंजक $5x^2 + 7xy + 8z + 3xy - 7x^2 - 2xy - 6z - 10$ को सरल कीजिए।

$5x^2 + 7xy + 8z + 3xy - 7x^2 - 2xy - 6z - 10$
 $= (5 - 7)x^2 + (7 + 3 - 2)xy + (8 - 6)z - 10$ (समान पदों को व्यवस्थित करने पर)
 $= -2x^2 + 8xy + 2z - 10$

 **प्रयास कीजिए**

जोड़िए और घटाइए

(i) $p - 2q$, $p + q$

(ii) $3pq + 5p - 2$, $pq - 4$

अभ्यास 6 (d)

1. बीजीय व्यंजकों को जोड़िए।

(i) $8a - 2b$ तथा $2a + 2b$

(ii) $7a - 4b$, $5a + 2b$ तथा $-2a - 3b$

(iii) $19x^2 - 5y^2$, $3x^2 + 5y^2$ तथा $-2a - 3b$ (iv) $2x^2 - y^2$, $x^2 + 3y^2$ तथा $x^2 - y^2$

2. निम्नांकित में पहले बीजीय व्यंजक में से दूसरे बीजीय व्यंजक को घटाइए:

(i) $2xy - 2y^2 + 3x^2 + 5y$ में से $xy + 3xz - y^2$ को

(ii) $4x - 3y + 7z$ में से $-2x - 3y + 7z$ को

(iii) $a^2 - 3b^2 + 7ab$ में से $-a^2 - 3b^2 + 7ab$ को

3. निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर के सही विकल्प लिखिए।

(a) $x - y + 2x - 4y$ का मान होगा।

(i) $3x - 4y$ (ii) $3x - 5y$ (iii) $3x + 5y + z$ (iv) $3x + 3y$

(b) $2x + y - z - (3x + y - 2z)$ का मान होगा।

(i) $2x + y - z$ (ii) $x + 2y + 3z$ (iii) $-x + z$ (iv) $x - 2z$

4. 1 में से $-3x + 2y - 4z$ को घटाइए।

5. $a - b$ में क्या जोड़ें कि योगफल $2a + b$ हो जाए?

6. $2x + y, x - 2y$ से कितना अधिक है?

7. किसी गाँव में पुरुषों की संख्या $6xy + 5y^2 - 8z$ है, महिलाओं की संख्या $2x + yx - 2y$ है। बताइये पुरुषों की संख्या महिलाओं की संख्या से कितनी अधिक है?

8. डेविड प्रतिमाह ₹ $(4x^2 + 7y - 2xy)$ भोजन पर, ₹ $(-2x^2 + 4x + 5xy)$ शिक्षा पर तथा ₹ $(x^2 + 3xy)$ किराये पर खर्च करता है। यदि उसकी मासिक आय ₹ $(-5x^2 + 4x + 5xy)$ हो तो ज्ञात कीजिए:

(i) डेविड का मासिक खर्च

(ii) डेविड की मासिक बचत

6.9. बीजीय व्यंजकों के मान ज्ञात करना

हम जानते हैं कि बीजीय व्यंजक का मान, व्यंजक को बनाने वाले चरों के मान पर निर्भर करता है। अनेक स्थितियों में व्यंजकों के मान को ज्ञात करने की आवश्यकता होगी।

जब हम गणित या ज्यामिति में सूत्रों का प्रयोग करते हैं तो हमें व्यंजकों के मान ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरणार्थ, l सेमी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल l^2 वर्ग सेमी होता है। यदि $l = 10$ सेमी है तो वर्ग का क्षेत्रफल 10^2 सेमी² = 100 वर्ग सेमी है। आइए हम कुछ और उदाहरणों से समझें।

उदाहरण 2- निम्नांकित व्यंजकों के मान $x=3$ के लिए ज्ञात कीजिए।

(i) $x - 5$ (ii) $7x - 5$ (iii) $17 - x^2$ (iv) $35 - 2x^3$

हल : (i) $x - 5$ में $x=3$ रखने पर

मान = $3 - 5 = -2$

(ii) $7x - 5$ में $x=3$ रखने पर

मान = $7 \times 3 - 5 = 21 - 5 = 16$

(iii) $17 - x^2$ में $x = 3$ रखने पर

$$\text{मान} = 17 - (3 \times 3) = 17 - 9 = 8$$

(iv) $35 - 2x^3$ में $x = 3$ रखने पर

$$\begin{aligned}\text{मान} &= 35 - 2 \times 3^3 = 35 - 2 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 35 - 54 = -19\end{aligned}$$

उदाहरण 3 : (i) $5a^2 + 4a - 2$ और (ii) $a^3 + 4a^2 + 3a - 7$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $a = -2$

(i) $5a^2 + 4a - 2$ में $a = -2$ रखने पर

$$\begin{aligned}\text{मान} &= 5(-2)^2 + 4(-2) - 2 \\ &= 20 - 8 - 2 \\ &= 10\end{aligned}$$

(ii) $a^3 + 4a^2 + 3a - 7$ में $a = -2$ रखने पर

$$\begin{aligned}(-2)^3 + 4(-2)^2 + 3(-2) - 7 \\ = -8 + 16 - 6 - 7 \\ = 16 - 21 = -5\end{aligned}$$

अभ्यास 6 (e)

1. निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए, यदि $x = 7, y = 3$

(i) $x + y$ (ii) $2x - y$

(iii) $3xy$ (iv) $2x^2$

(v) $5x^3 y$

2. सही विकल्प छाँटिए।

(a) यदि $l = 3$ तो $(2l)^3$ का मान है।

(i) 27 (ii) 216 (iii) 32 (iv) 81

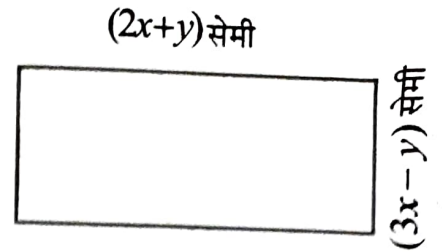
(b) यदि $x = 2, y = 1$ तो $(5xy)^2$ का मान है

(i) 100 (ii) 10 (iii) 50 (iv) 150

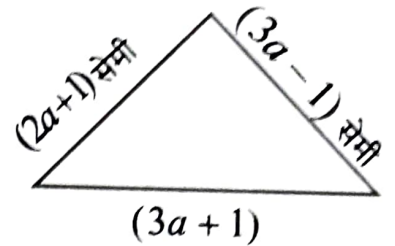
(c) यदि $x = 3, y = 1, z = 2$ तो $(x + y + z)^2$ का मान है

(i) 48 (ii) 24 (iii) 36 (iv) 6

3. यदि $x=4$ तथा $y=3$ तो
संलग्न चित्र में आयत की भुजायें ज्ञात कीजिए।



4. यदि $a=4$ तो
संलग्न चित्र में त्रिभुज की भुजायें ज्ञात कीजिए।



5. यदि $y=-1$ तो बीजीय व्यंजक $2y^3 + 3y^2 + y - 3$ का मान ज्ञात कीजिये।
6. यदि $a = -2, b = 2$ तथा $c = 1$ तो बीजीय व्यंजक $4a^3 - 2abc + 3bc + b^2$ का मान ज्ञात कीजिये।
7. यदि $a = 3$ तथा $b = 2$ तो निम्नांकित को सत्यापित कीजिये :
- (i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (iii) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

6.10. कोष्ठकों (Brackets) का प्रयोग

हमने व्यंजकों का अध्ययन करते समय देखा कि किसी परिस्थिति या कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में किस प्रकार लिखते हैं। जब किसी कथन में कई घटना क्रम मिलकर एक संयुक्त घटना बनाते हैं तो इस प्रकार के प्रत्येक कथन को एक दूसरे से जोड़ने के लिए आवश्यकतानुसार विभिन्न प्रकार के कोष्ठकों का प्रयोग किया जाता है। आइए हम इसे उदाहरण के द्वारा समझें।

माना निखिल के पास $2x$ आम हैं उसने उसमें से $3y$ आम अपनी बहन को दे दिया। इसके बाद शेष बचे आमों का आधा करके 30 निकाल लिया। निकालने के बाद शेष का तिगुना करके पुनः $3x$ जोड़ दिया, जोड़ने के बाद प्राप्त आमों की संख्या में y से गुणा कर दिया। आइए हम इस कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में अलग अलग घटना क्रम के अनुसार किस प्रकार संयुक्त करके लिख सकते हैं, देखें :

निखिल के पास आमों की संख्या $= 2x$

उसके बहन के पास आमों की संख्या $= 3y$

शेष आम $= 2x - 3y$

शेष आम का आधा $= \frac{1}{2}(2x - 3y)$, यहाँ पर $2x - 3y$ का संयुक्त आधा दिखाने के लिए '()' चिह्न

का प्रयोग करना पड़ा। इसे छोटा कोष्ठक (Parentheses or Round Bracket) कहते हैं।

शेष में से 30 आम निकालने पर $= \frac{1}{2}(2x-3y)-30$

इसका 3 गुना करके इस कथन को $3\left\{\frac{1}{2}(2x-3y)-30\right\}$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे। यहाँ $\{ \}$ चिह्न को मँझला

कोष्ठक (Braces or Curly Bracket) कहते हैं।

पुनः उपरोक्त व्यंजक में $3x$ जोड़ने पर लिखेंगे $3x+3\left\{\frac{1}{2}(2x-3y)-30\right\}$

अन्ततः सब में y से गुणा करने पर इस कथन को $y\left[3x+3\left\{\frac{1}{2}(2x-3y)-30\right\}\right]$ द्वारा दर्शाएंगे, यहाँ

चिह्न $[]$ को बड़ा कोष्ठक (Square bracket) कहते हैं।

आइये हम इन कोष्ठक युक्त व्यंजकों को सरल करने के तरीकों को उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 4 : $4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - (2 - 7x^2) + 6x\}]$ को सरल कीजिए।

$$\begin{aligned} &= 4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - 2 + 7x^2 + 6x\}] \\ &= 4x^3 - [9x^2 + 5x^3 + 2 - 7x^2 - 6x] \\ &= 4x^3 - [5x^3 + 2x^2 - 6x + 2] \\ &= 4x^3 - 5x^3 - 2x^2 + 6x - 2 \\ &= -x^3 - 2x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$$

टिप्पणी : प्रायः हम रेखा कोष्ठक एवं छोटे कोष्ठक $()$ को सबसे अन्दर, फिर मँझला कोष्ठक $\{ \}$ तथा अन्त में $[]$ बड़ा कोष्ठक लगाते हैं।

- कोष्ठक खोलते समय यदि कोष्ठक के बाहर $+$ का चिह्न होता है, तो कोष्ठक के भीतर के पदों के चिह्न नहीं बदलते हैं।
- यदि कोष्ठक के बाहर ऋण $(-)$ का चिह्न हो, तो कोष्ठक खोलने पर उसके पदों के चिह्न बदल दिए जाते हैं।
- यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग हुआ हो, तो हम सबसे भीतर वाले कोष्ठक को पहले खोलते हैं और उसके भीतर के पदों को सरल कर लेते हैं। यही क्रिया सभी कोष्ठकों को हटाने तक करते हैं।
- दो या दो से अधिक कोष्ठकों के बीच यदि कोई चिह्न न हो तो वहाँ गुणा का चिह्न मानते हैं।

 **प्रयास कीजिए**

$$2x - [5y - \{-3x + y(7 - x)\}] \text{ को सरल कीजिए।}$$

अभ्यास 6(f)

1. निम्नांकित कथनों में कोष्ठकों का प्रयोग कीजिए:
 - (i) $3x$ तथा $4z$ के योग में से $5y$ घटाइए।
 - (ii) $4pq$ में $7r$ को जोड़िये तथा प्राप्त मान का आधा कीजिए।
 - (iii) $3xy$ तथा $7yz$ के योग के तिहाई में $3z^2y$ जोड़िए।
2. प्रत्येक प्रश्न के चार उत्तर दिए गये हैं। सही उत्तर को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए:
 - (i) $5x + (2x - 3)$ को सरल करने पर प्राप्त होता है:

(a) $3 - 7x$ (b) $3x - 3$ (c) $7x + 3$ (d) $7x - 3$
 - (ii) $a - (b - 2a)$ को सरल करने पर प्राप्त होता है:

(a) $3a - b$ (b) $3b - a$ (c) $a - b$ (d) $3a - b$
 - (iii) $(a + b + c) - (a + b - c)$ को सरल करने पर प्राप्त होता है:

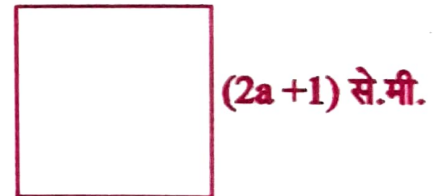
(a) $2a + 2b$ (b) $2c$ (c) $2b + 2a$ (d) $2c - b$
 - (iv) $-2x^2 - (-x^2 + 4x)$ को सरल करने पर प्राप्त होता है:

(a) $-x^2 - 4x$ (b) $x^2 - 4x$ (c) $-x^2 + 4x$ (d) $x^2 + 4x$
3. निम्नांकित को सरल कीजिए:
 - (i) $(a^2 + 8ab + 5) + (3ab - 4a^2 + 8)$
 - (ii) $(x + y + z) - (x - y + z)$
 - (iii) $x^2 + \{2x^2 + (x^2 - y^2)\}$
 - (iv) $2p - \{3q + (5p - q + 2p)\}$
 - (v) $5xy + [3z - \{2x - (2z - 3y)\}]$
 - (vi) $2x^2yz - [3x^2 - \{2y - (x^2yz - y^2 + x^2)\}]$
 - (vii) $a - [(a^2 - 5b) - 2\{2a^2 - (3c - 2b)\}]$
4. निम्नांकित व्यंजकों में अन्तिम दो पदों को कोष्ठक में लिखकर पहले ऋण चिह्न इस प्रकार लगाइए कि व्यंजक का मान न बदले:
 - (i) $-p + r + x^2 + q^2 - a^2$
 - (ii) $a + b + c - ab - bc - ca$
 - (iii) $3xy - 5pq + 3y^2 - 4x + 7$

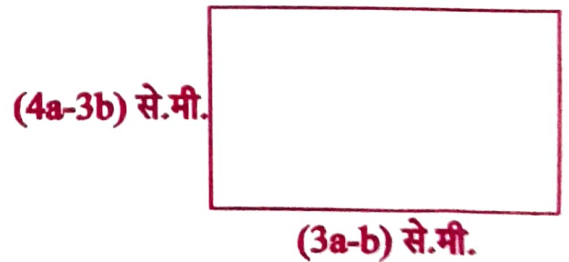
दक्षता अभ्यास 6

1. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों के सभी पद लिखिए:
 (i) $3x - 7y + 9$ (ii) $2a^2 + 5a - 3b^2$
2. निम्नांकित में x के गुणांक बताइए:
 (i) $3x$ (ii) $-a^2 \cdot x$ (iii) $5xy^2$ (iv) $-pqx$
3. निम्नलिखित में सजातीय पदों को छोटिए:
 (i) $a^2, b^2, 3a^2, c^2$
 (ii) $-3xy, yz, 7x, 2xy$
 (iii) $cab^2, a^2bc, b^2ac, ab^2, acb^2$
 (iv) $7m^2n, m^2n, -nm^2, m^2n^2, 7nm^2$
4. सरल कीजिए -
 (i) $(x - 2y) + (3y - x) - (3x - 2y)$
 (ii) $3mn^2 - (5m^2n^2) + (-7mn^2) - (2m^2n^2)$
 (iii) $15x - [8x^3 + 3x^2 - \{8x^2 - (4 - 2x - x^3) - 5x^3\} - 2x]$
5. दी गई आकृतियों का परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि $a = 3, b = 2$

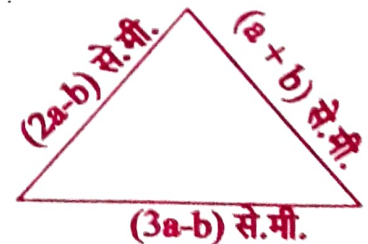
(i) संलग्न आकृति में वर्ग की भुजा दी गई है।



(ii) संलग्न आकृति में आयत की भुजायें दी हैं।



(iii) संलग्न आकृति में त्रिभुज की भुजायें दी हैं।



6. यदि $a = -4, b = -2, c = -1, d = 6$ तो $\frac{c^2 - d^2}{a + b + c}$ का मान ज्ञात कीजिए।
7. यदि $A = 7a^2 + 5ab - 9b^2, B = -4a^2 + ab + 5b^2, C = 4b^2 - 3a^2 - 6ab$ तो दिखाइये $A + B + C = 0$ ।
8. सरल कीजिए :
- (i) $3abc - 2ab^2 - 5abc + 3ab^2$
- (ii) $5x^2 - 2xy + 3x^2 + 5xy - 9x^2$
9. यदि $a = 2, b = 1$ तथा $c = 3$ तो $(2a + 4b - c)^3$ का मान ज्ञात कीजिए:
10. अपनी अभ्यास पुस्तिका में A समूह के व्यंजकों को सरल करने पर प्राप्त सही उत्तरों को समूह B में छाँटकर सुमेलित कीजिए:

समूह A	समूह B
(1) $(x + y) + (2x - 3y)$	(i) $x^2 - \frac{5}{3}y^2$
(2) $(x - y) - (x + y)$	(ii) $3x - 2y$
(3) $x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 + y^2 - 2xy)$	(iii) $x^2 + 3y^2$
(4) $2(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)$	(iv) $-2y$
(5) $(3x^2 - y^2) - 2(x^2 + \frac{y^2}{3})$	(v) $4xy$

इस इकाई में हमने सीखा

- कोई चर या अचर संख्या अथवा मौलिक गणितीय संक्रियाओं के चिह्नों से युक्त चर या अचर संख्याओं का समूह बीजीय व्यंजक कहलाता है।
- कोई आंकिक संख्या अथवा अक्षर संख्या अथवा इनके गुणनफल या भागफल को पद कहते हैं।
- किसी पद में अंकीय गुणनखंड शेष गुणनखंड का संख्यात्मक गुणांक तथा शेष गुणनखंड अंकीय गुणनखंड का बीजीय गुणनखंड कहलाता है।
- जिन पदों में बीजीय गुणनखंड आपस में समान होते हैं, उन्हें सजातीय पद या समान पद कहते हैं, जबकि उनके संख्यात्मक गुणनखंड अलग अलग हो सकते हैं।
- जिन पदों के बीजीय गुणनखंड आपस में समान नहीं होते, उन्हें विजातीय पद या असमान पद कहते हैं।
- व्यंजक में चर की उच्चतम ऋणोत्तर घात को व्यंजक की डिग्री कहते हैं।
- जिन व्यंजकों में एक पद होते हैं, उन्हें एक पदीय व्यंजक कहते हैं।

8. जिन व्यंजकों में दो पद होते हैं, उन्हें द्विपद या द्विपदीय व्यंजक कहते हैं।
9. जिन व्यंजकों में तीन पद होते हैं, उन्हें त्रिपदीय व्यंजक कहते हैं।
10. सजातीय पदों का योगफल अथवा अन्तर एक अन्य सजातीय पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक उनके पदों के संख्यात्मक गुणांकों के योग अथवा अन्तर से प्राप्त होता है।
11. चार प्रकार के कोष्ठकों का प्रयोग किया जाता है, रेखा कोष्ठक '——', छोटा कोष्ठक '()', मँझला कोष्ठक '{ }', बड़ा कोष्ठक '[]'।
12. कोष्ठक खोलते समय यदि कोष्ठक के पहले '+' का चिह्न होता है, तो कोष्ठक के भीतर के पदों के '+' और '-' चिह्न नहीं बदलते हैं, किन्तु यदि कोष्ठक के बाहर '-' का चिह्न हो, तो कोष्ठक के भीतर के '+' और '-' चिह्न क्रमशः '-' तथा '+' चिह्न में बदल जाते हैं।
13. यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग हुआ हो, तो हम सबसे भीतर वाले कोष्ठक को पहले खोलते हैं और उसके भीतर के पदों को सरल करते हैं। यही क्रिया सभी कोष्ठकों को हटाने तक करते हैं।
14. दो या दो से अधिक कोष्ठकों के बीच यदि कोई चिह्न न हो, तो वहाँ गुणा का चिह्न मानते हैं।



उत्तरमाला

अभ्यास 6 (a)

1. $5x, 6$ पेन्सिलें, 2. $a^2, -3ab, -4$, 3. $4ax, 6$, 4. $x^2, -3x, -7$, 5. $5a, -b$, 6. xy^2 , 7. 1, 8. -3, 9. xy^2 , 10. (i) सत्य (ii) असत्य।

अभ्यास 6 (b)

1. (i) $(6x^2y, 8x^2y)$, $(-6xyz, -7xyz)$ (ii) $(-3pq, 9qp)$, $(-5pq^2, 4pq^2)$ 2. (i), (iii),

अभ्यास 6 (c)

1. (i) एक, (ii) दो, (iii) तीन, (iv) दो, 2. (i) 2, 2, 1, 0 (ii) 3, 3, 3 (iii) 4, 4, 3, 1, 0 (iv) 2, 2, 0 3. (i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य 4. (i) द्विपदीय, (ii) एकपदीय, (iii) त्रिपदीय, (iv) द्विपदीय, (v) त्रिपदीय, 5. त्रिपदीय, 6. (i) $3x - 2y$ (ii) दो, (iii) द्विपदीय

अभ्यास 6 (d)

1. (i) $10a$, (ii) $10a - 5b$, (iii) $22x^2 - 2a - 3b$, (iv) $4x^2 + y^2$, 2. (i) $3x^2 + 4y^2 + xy - 3xz$, (ii) $6x$, (iii) $2a^2$, 3. (a) (ii), (b) (iii), 4.

1. $1+3x-2y+4z$, 5. $a+2b$, 6. $x+3y$, 7. $5y^2+5xy-8z-2x+2y$, 8. (i) मासिक खर्च $3x^2 + 4x + 7y + 6xy$, (ii) मासिक बचत $-8x^2 - xy - 7y$ ।

अभ्यास 6 (e)

1. (i) 10, (ii) 11, (iii) 63, (iv) 98, (v) 5145, 2. (a) ii, (b) i, (c) iii, 3. लम्बाई 11 सेमी, चौड़ाई 9 सेमी, 4. 9 सेमी, 13 सेमी, 11 सेमी, 5. 1; 6. -14

अभ्यास 6 (f)

1. (i) $(3x+4z)-5y$, (ii) $\frac{(4pq+7r)}{2}$, (iii) $\frac{(3xy+7yz)}{3} + 3z^2y$, 2. (i) d, (ii) d, (iii) b, (iv) a, 3. (i) $-3a^2 + 11ab + 13$, (ii) $2y$, (iii) $4x^2 - y^2$, (iv) $(-5p - 2q)$, (v) $-2x - 3y + 5z + 5xy$, (vi) $x^2yz - 2x^2 + y^2 + 2y$, (vii) $3a^2 + a + 9b - 6c$, 4. (i) $-p+r+x^2 - (-q^2+a^2)$, (ii) $a+b+c-ab-(bc+ca)$, (iii) $3xy-5pq+3y^2-(4x-7)$

दक्षता अभ्यास 6

1. (i) $3x, -7y, 9$, (ii) $2a^2, 5a, -3b^2$, 2. (i) 3, (ii) $-a^2$, (iii) $5y^2$, (iv) $-pq$, 3. (i) $a^2, 3a^2$, (ii) $-3xy, 2xy$, (iii) cab^2, b^2ac, acb^2 , (iv) $7m^2n, m^2n, -nm^2, 7nm^2$, 4. (i) $-3x+3y$, (ii) $-7m^2n^2 - 4mn^2$, (iii) $-12x^3 + 5x^2 + 19x - 4$, 5. (i) 28 सेमी, (ii) 26 सेमी, (iii) 16 सेमी, 6. 5, 8. (i) $ab^2 - 2abc$ (ii) $-x^2 + 3xy$ 9. 125, 10. 1. $\rightarrow$ (ii), 2. $\rightarrow$ (iv), 3. $\rightarrow$ (iv), 4. $\rightarrow$ (iii), 5. $\rightarrow$ (i)