इकाई - 5 बीजगणितीय अवधारणा

❖ संख्याओं को दर्शाने के लिए अक्षरों की आवश्यकता एवं प्रयोग
❖ संख्याओं और अक्षर संख्याओं की मूल संक्रियाएँ
❖ अक्षर संख्याओं की घात
❖ चर और अचर संख्याएँ

5.1 भूमिका

हमने अंकगणित में संख्याओं और उन पर विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है। अपने दैनिक जीवन की अधिकांश समस्याओं को हल करने में संख्याओं का उपयोग हम देख चुके हैं । संख्याओं से संबंधित जटिल समस्याओं का हल कई बार अंकगणितीय विधियों से नहीं हो पाता। इसके अतिरिक्त समस्याओं को और अधिक प्रभावशाली ढंग से हल करने की आवश्यकता पड़ती है जिन्हें हम एक अन्य विधि से करते हैं। अब हम इससे संबंधित उस गणित की शाखा का अध्ययन करेंगे जो बीजगणित (Algebra)कही जाती है।

हमारे देश में बीजगणित का अध्ययन प्राचीन काल से ही होता रहा है। बीजगणित वस्तुत: अंकगणित का ही व्यापक रूप है। इसकी मुख्य विशेषता यह है कि इसमें संख्याओं के स्थान पर अक्षरों का भी प्रयोग किया जाता है। **अक्षरों के प्रयोग से हम नियमों और सूत्रों** (formulas) **को व्यापक रुप में लिख पाने में समर्थ हो जायेगें। दूसरी बात यह है कि अक्षर अज्ञात राशियों के स्थान पर भी प्रयोग किये जा सकते हैं। इन अज्ञात राशियों** (unknowns) **को निर्धारित करने की विधियों को लिखकर हम पहेलियों** (puzzles) **और दैनिक जीवन से सम्बन्धित अनेक समस्याओं को हल करने के अनेक प्रभावशाली साधन विकसित कर सकते हैं।** अक्षर संख्याओं के प्रयोग से हम केवल एक विशेष संख्या की बात न कर के किसी भी संख्या की बात कर सकते हैं, इसीलिए इन्हें बीजगणित कहा जाता है। बीजों की सहायता से नियमों और सूत्रों को व्यापक रूप से लिख सकते हैं। संख्याओं के लिए अक्षरों का प्रयोग करके प्राप्त अक्षर संख्याओं पर भी गुणा, भाग आदि की संक्रियाएँ की जा सकती हैं। आप पायेंगे कि बीजगणित न केवल उपयोगी है, अपितु यह अत्यंत रोचक भी है।

5.2 संख्याओं को दर्शाने के लिए अक्षरों का प्रयोग, पढ़िये और समझिए:

चित्र - 1 की टोकरी में कितने सेब हैं?

टोकरी में 2 सेब हैं।

चित्र-2 की टोकरी में कितने सेब हैं?

टोकरी में 3 सेब हैं।

चित्र -3 की टोकरी में कितने सेब हैं ?

टोकरी में पाँच सेब हैं।

चित्र -4 की टोकरी में सेब भरे है, इनको देखकर सही संख्या बताइए।

इनके फलों को गिनना कठिन है। अतः केवल हम यह कह सकते हैं कि टोकरी में 'कुछ' सेब हैं।

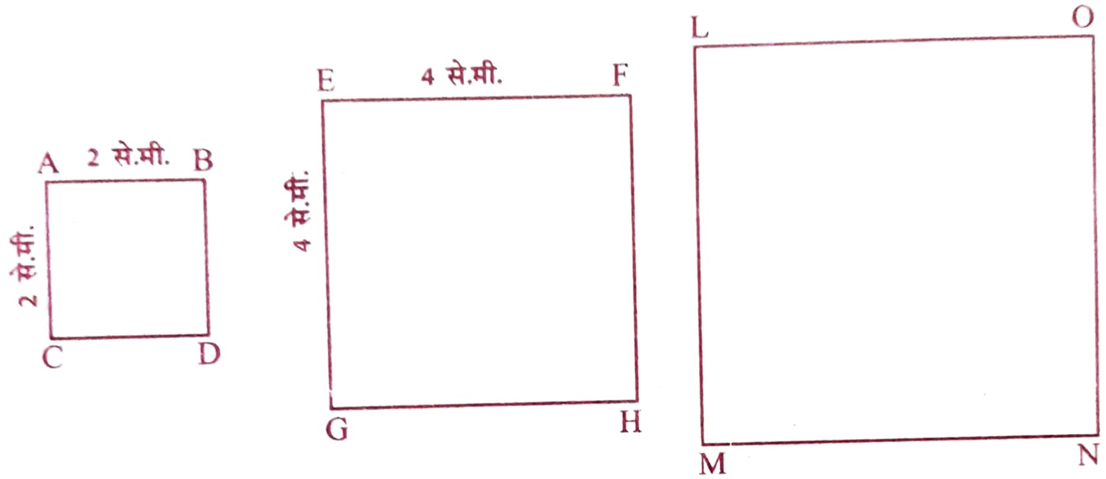
चित्र-1

चित्र-2

चित्र-3

चित्र-4

चित्र-5 में वर्ग बने हैं। इन्हें देखकर प्रत्येक वर्ग की भुजा की लम्बाई बताइए।



चित्र-5

वर्ग ABDC की भुजा की लम्बाई = 2 सेमी

वर्ग EFHG की भुजा की लम्बाई = 4 सेमी

वर्ग LMNO की भुजा की लम्बाई ज्ञात नहीं है। इसे हम 'कुछ' सेमी मान सकते हैं।

- राम के पास ₹ 45 थे। उसे अपनी बहन शीला से कुछ रुपये मिल गये। अब उसके पास कुल कितने रुपये हैं ? राम के पास कुल ₹ (45 + कुछ) हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों में हमने देखा कि गणित में अभी तक संख्याओं को संख्या संकेतों 0,1,2,3.....8,9 से निरूपित करते हैं। हमें ऐसी संख्याओं की भी बात करनी होती है, जो ज्ञात नहीं होती है किन्तु ज्ञात की जा सकती हैं। ऐसी संख्याओं के लिए अँग्रेजी (अथवा हिन्दी) वर्णमाला के अक्षरों का प्रयोग किया जाता है।

मान लीजिए, किसी विद्यालय में वृक्षारोपण कार्यक्रम आयोजित किया जा रहा है। प्रत्येक शिक्षार्थी 2 पौधे लगाता है। पहला शिक्षार्थी दो पौधे लगाता है।

अतः पौधों की संख्या = 2

दूसरा शिक्षार्थी भी दो पौधे लगाता है, अत:
पौधों की कुल संख्या = $2 \times 2 = 4$

तीसरा शिक्षार्थी भी दो पौधे लगाता है, अत:
पौधों की कुल संख्या = $2 \times 3 = 6$

इस प्रकार

दस शिक्षार्थियों द्वारा लगाये गये पौधों की कुल संख्या = $2 \times 10 = 20$

बीस शिक्षार्थियों द्वारा लगाये गये पौधों की कुल संख्या = $2 \times 20 = 40$

हम प्रत्येक स्थिति में कुल पौधों की संख्या कैसे ज्ञात कर रहे हैं ? हम देखते हैं कि पौधों की कुल संख्या

= 2 × (शिक्षार्थियों की संख्या)

आइए, सुविधा के लिए हम शिक्षार्थियों की संख्या के लिए अक्षर n मान लेते हैं।

अत: लगाये गये पौधों की कुल संख्या = $2 \times n = 2n$

ध्यान दीजिए

एक छात्र के लिए $n = 1$, दो छात्रों के लिए $n = 2$, इत्यादि। इस प्रकार n कोई भी प्राकृतिक संख्या 1,2,3...हो सकती है।

50 छात्रों द्वारा रोपित पौधों की संख्या के लिए हम $n = 50$ लेंगे। अत: पौधों की संख्या $2 \times 50 = 100$ क्या अक्षर n द्वारा व्यक्त किये गये सूत्र $2n$ द्वारा पौधों की कुल संख्या ज्ञात करना आसान नहीं हुआ?

छात्रों की संख्या	1	2	3	...	...	...	10	...	...	20	...	50	...	n
पौधों की संख्या	2	4	6	...	...	...	20	...	...	40	...	100	...	$2n$

किसी अज्ञात संख्या को अंग्रेजी वर्णमाला के x, y, z, a, b, c आदि तथा हिन्दी वर्णमाला के क, ख, ग, य, र, ल आदि अक्षरों से व्यक्त करते हैं। इन संख्याओं को **अक्षर संख्या** या **बीज** कहते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों में हम 'कुछ' सेबों के स्थान पर 'a' सेब, वर्ग की भुजा की 'कुछ' सेमी लम्बाई के स्थान पर 'y' सेमी लम्बाई तथा शीला द्वारा राम को दिये गये 'कुछ' रुपयों को 'x' रुपयों द्वारा प्रकट कर सकते हैं। प्रयुक्त अक्षर a , y , x अक्षर संख्याएं है। ये अक्षर संख्याएं किसी राशि को प्रकट नहीं करतीं, केवल संख्याओं को व्यक्त करती हैं।

निम्नलिखित कथनों पर ध्यान दीजिए :

1. सईदा के पास 'n' आम हैं। इस कथन से आमों की संख्या के बारे में क्या ज्ञात होता है? इससे ज्ञात होता है कि सईदा के पास कुछ आम हैं जिनकी निश्चित संख्या ज्ञात नहीं है। n का मान कोई भी संख्या हो सकती है।
2. श्याम के पास ₹ 4357 थे। उसने कुछ रुपये मनीषा को दिये। मान लीजिए कि श्याम ने मनीषा को ₹ x दिये, तो उसके पास कुल ₹ $(4357 - x)$ बचे।
3. अमीना माचिस की तीलियों से समबाहु त्रिभुजों के प्रतिरूप बना रही है-

उसी समय उसका मित्र राकेश आ जाता है। वह अमीना से पूछता है कि यदि ऐसे त्रिभुज के 6 प्रतिरूप बनाने हों, तो कुल कितनी तीलियाँ लगेंगी?

अमीना अपने बनाये गये त्रिभुजों के प्रतिरूपों को देखकर निम्नांकित सारणी तैयार करती है:

बनाये गये त्रिभुजों की संख्या	1	2	3	4	5	6
आवश्यक तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18

अमीना राकेश को बताती है कि त्रिभुजों के 6 प्रतिरुप बनाने में कुल 18 तीलियाँ लगेंगी।

प्रयास कीजिए

आप बताइए कि यदि उपर्युक्त त्रिभुजों के प्रतिरूपों की संख्या n हो तो आवश्यक तीलियों की कुल संख्या क्या होगी?

उदाहरण 1: अक्षर V का (V के रूप में) तीलियों से प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए एक चर का प्रयोग कीजिए।

हल :

V का एक प्रतिरूप V तैयार करने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 1 = 2$

V के दो प्रतिरूप V V तैयार करने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 2 = 4$

V के तीन प्रतिरूप V V V तैयार करने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या = $2 \times 3 = 6$

....

अत: यदि V के n प्रतिरूप बनाने हों तो आवश्यक तीलियों की संख्या = $2 \times n = 2n$

इस नियम को हम निम्नांकित सारणी के द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं :

बनाये गये V के प्रतिरूपों की संख्या	1	2	3	...	...	...	10	...	...	n
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	...	...	...	20	...	...	$2n$

उदाहरण 2: मोहिनी राधिका की छोटी बहन है। मोहिनी राधिका से 5 वर्ष छोटी है। क्या आप मोहिनी की आयु को राधिका के आयु के पदों में व्यक्त कर सकते हैं ?

हल : मान लीजिए कि राधिका की आयु $= y$ वर्ष है।

दिया है कि मोहिनी राधिका से 5 वर्ष छोटी है।

अत: मोहिनी की आयु $= (y - 5)$ वर्ष

अभ्यास 5 (a)

1. शिक्षक प्रत्येक शिक्षार्थी को 3 पेंसिल देते हैं। यदि कक्षा में शिक्षार्थियों की कुल संख्या x हो तो बताइए कि शिक्षक शिक्षार्थियों को कुल कितनी पेंसिलें देते हैं?

2 अपनी उत्तर पुस्तिका पर रिक्त स्थानों में संख्याओं की जगह कोई बीज लिखिए और बताइए कि उसका प्रयोग किस संख्या के लिए किया गया है :

(i) $12 + 5 = 17$ (ii) $40 - 10 = 30$

$\square + 5 = 17$ $40 - \square = 30$

(iii) $4 \times 6 = 24$ (iv) $35 \div 5 = 7$

$\square \times 6 = 24$ $35 \div \square = 7$

3. रहीम के पास ₹ 10 थे, उसने रजिया को कुछ रुपये दे दिये। उसके पास कितने रुपये बचे। इस सम्बन्ध को अक्षर संख्याओं की सहायता से व्यक्त कीजिए।

4. एक बगीचे में कुछ पेड़ थे। 50 पेड़ और लगा देने पर पेड़ों की संख्या 120 हो गई। इस कथन को अक्षर संख्या की सहायता से व्यक्त कीजिये।

5. अक्षर N और M के प्रत्येक प्रतिरूप को तीलियों से बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए एक चर का प्रयोग कीजिए।

5.3 संख्याओं और अक्षर संख्याओं पर मूल संक्रियाएँ

अक्षर संख्याएँ x, y, z......., a, b, c......आदि संख्याओं को दर्शाने के काम आती हैं। सभी मूल संक्रियाएँ जो आंकिक संख्याओं के लिए प्रयोग में लायी जाती हैं, अक्षर संख्याओं के लिए भी प्रयुक्त होती हैं। यह तथ्य आप अधोलिखित तालिकाओं से समझ सकते हैं :

(i) योग की संक्रिया

संख्याएँ	योगफल
5 और 4 जोड़ने पर	$5 + 4$
x तथा 4 जोड़ने पर	$x + 4$
x तथा y जोड़ने पर	$x + y$
a, b तथा c जोड़ने पर	$a + b + c$

(ii) अंतर की संक्रिया

10 में से 3 घटाने पर	$10 - 3$
x में से 5 घटाने पर	$x - 5$
5 में से x घटाने पर	$5 - x$
x में से y घटाने पर	$x - y$
x में से शून्य घटाने पर	$x - 0$

(iii) गुणा की संक्रिया - गुणा संक्रिया बार-बार जोड़ने की संक्रिया के समान है। इसे ध्यान से देखिए।

2 + 2 +.......	4 बार	$= 4 \times 2 = 8$
$x + x +$	4 बार	$= 4 \times x = 4x$
$a + a +$.......	3 बार	$= 3 \times a = 3a$
$x + x +$......	y बार	$= y \times x = yx$
1+ 1 + ...	x बार	$= x \times 1 = x$
0 + 0 + ...	x बार	$= x \times 0 = 0$

(iv) भाग की संक्रिया

20 को 5 से विभाजित करने पर	$20 \div 5 = \frac{20}{5} = 4$
a को b से विभाजित करने पर	$a \div b = \frac{a}{b}, b \neq 0$

40 को p से विभाजित करने पर	$40 \div p = \frac{40}{p}, p \neq 0$
b को 5 से विभाजित करने पर	$b \div 5 = \frac{b}{5}$

ध्यान दीजिए

1. $4 \times x$ को सामान्यत: $4x$ लिखा जाता है। बीच में गुणा का चिह्न नहीं लगाते हैं।
2. xy का अर्थ $x \times y$ है।
3. $1 \times x$ को $1x$ न लिखकर केवल x लिखा जाता है।
4. $a \div b = \frac{a}{b}, b \neq 0$ और $b \div a = \frac{b}{a}, a \neq 0$

   अत: $a \div b$, $b \div a$ के समान नहीं है, जब तक कि $a = b$ या $a = -b$ न हो।

   इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते है :

   $a \div b \neq b \div a$ ['$\neq$' को 'बराबर नहीं' पढ़ा जाता है] अर्थात् $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$ जब तक कि $a = b$ या $a = -b$ न हो।
5. हम उदाहरण लेकर देख सकते हैं कि संख्याओं के गुणा के निम्नलिखित प्रगुण बीजों के गुणा में भी लागू होते हैं :-

   (i) $xy = yx$ (क्रम विनिमेय प्रगुण)

   (ii) $(xy) \times z = x(yz)$ (साहचर्य प्रगुण)

   (iii) $x(y+z) = xy + xz$ (वितरण प्रगुण)

   इस प्रकार, हम उदाहरण लेकर देख सकते हैं कि संख्याओं की भाँति अक्षर संख्यायें भी योग, अंतर और विभाजन संक्रियों के प्रगुणों का पालन करती हैं।

प्रयास कीजिए :

1. अक्षर संख्या x तथा 7 का योगफल बताइए।
2. 5 से y घटाने पर अन्तर कितना होगा ?
3. abc और d का योगफल बताइए।
4. $0 \times y$ का मान बताइए।
5. यदि $x=1$ और $y=1$ तो xy का मान कितना होगा ?
6. x को 30 से विभाजित करने पर भागफल कितना होगा ?

उदाहरण 3 : एक संख्या x है और दूसरी संख्या 10; इनका योगफल कितना होगा?

हल : दिया है

पहली संख्या $= x$

दूसरी संख्या $= 10$

तब, योगफल $= x + 10$

उदाहरण 4 : हानि, क्रय मूल्य तथा विक्रय मूल्य के अन्तर के बराबर होती है, (जब विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम हो)। इस कथन को मूल संक्रियाओं के चिह्नों की सहायता से व्यक्त कीजिए।

हल: मान लिया कि क्रय मूल्य = ₹ C

विक्रय मूल्य = ₹ S   हानि = ₹ L

चूँकि हानि = क्रय मूल्य - विक्रय मूल्य

अत: ₹ L = ₹ C - ₹ S   ∴ L = ₹ (C - S)

अभ्यास 5 (b)

1. निम्नलिखित को बीजगणितीय रूप में लिखिए :

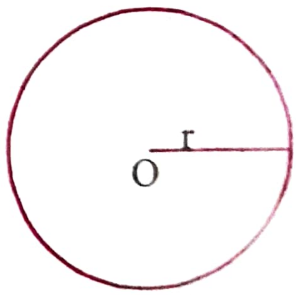
(i) 6 और x का योगफल

(ii) x में से 7 घटाने पर शेष

(iii) x का 5 गुना

(iv) x का एक तिहाई

2. निम्नलिखित कथनों को संख्याओं, बीजों तथा मूल संक्रियाओं के चिह्नों की सहायता से व्यक्त कीजिए :



(i) वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दूना होता है।

(ii) वर्ग का परिमाप उसकी एक भुजा का 4 गुना होता है।

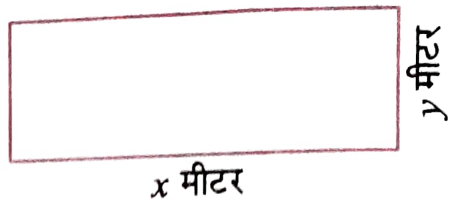
(iii) आयत का क्षेत्रफल उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई का गुणनफल होता है।

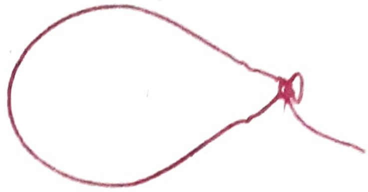
(iv) लाभ, विक्रय मूल्य तथा क्रय मूल्य के अन्तर के बराबर होता है, जब विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से अधिक हो।

3 (a). एक टोकरी में 50 आम तथा एक दूसरी टोकरी में x आम हैं। पहली टोकरी में दूसरी टोकरी से कितने आम अधिक हैं ?

(b). एक विद्यालय में कुल 100 छात्र है, जिनमें से X छात्र अनुपस्थित हो गये, तो उपस्थित छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

4. संलग्न चित्र में आयत की आसन्न भुजाएँ x मीटर तथा y मीटर हैं। आयत का परिमाप लिखिए।

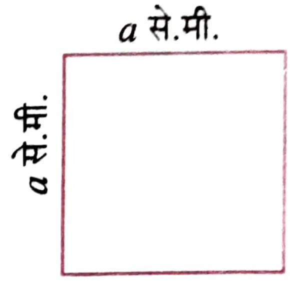




5. एक गुब्बारे का मूल्य x पैसे है।
ऐसे 12 गुब्बारों का मूल्य कितना होगा?

6. कक्षा में x विद्यार्थी हैं, जिनमें एक चौथाई बालिकाएँ हैं। कक्षा में कितनी बालिकाएँ हैं ?

7. संलग्न चित्र में एक वर्ग की भुजा a सेमी है। वर्ग का परिमाप लिखिए।



8. लीला राधा की छोटी बहन है। वह राधा से 6 वर्ष छोटी है। लीला की आयु राधा की आयु के पदों में लिखिए।

9. माँ ने घर में 16 लड्डू बनाये। उन्होंने x लड्डू मेहमानों व परिवार के सदस्यों को दिये। शेष लड्डूओं की संख्या बताइये।

1.4 अक्षर संख्याओं की घात

आप जानते हैं कि किसी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें वर्ग की भुजा में उसी भुजा से गुणा करना पड़ता है। यदि वर्ग की भुजा 10 सेमी है, तो उसका क्षेत्रफल = 10 सेमी × 10 सेमी = 10 × 10 सेमी^{2} । जिसे संक्षेप में हम $10^2\ cm^2 = 100\ cm^2$ लिखते हैं।

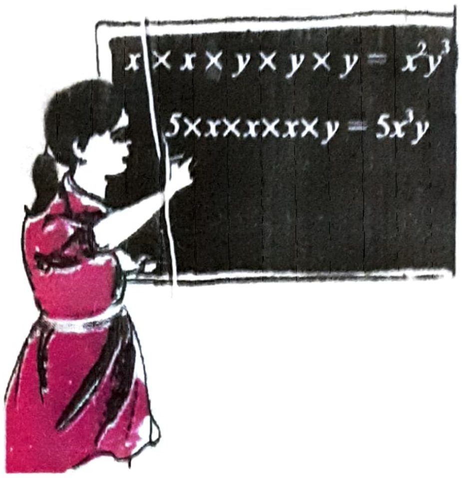
इसी प्रकार किसी घन का आयतन ज्ञात करने के लिए सूत्र, आयतन = भुजा × भुजा × भुजा का प्रयोग किया जाता है। जैसे यदि घन की एक भुजा 5 समी हो तो उसका आयतन
= 5 सेमी × 5 सेमी × 5 सेमी = 5 × 5 × 5 सेमी^{3} = 5^3सेमी^{3} = 125 घन सेमी

ध्यान दीजिए

गुणनफल 10 × 10 को संक्षेप में संकेतन 10^2 के द्वारा व्यक्त करते हैं। इसी प्रकार गुणनफल 5 × 5 × 5 को संक्षिप्त संकेतन 5^3 द्वारा व्यक्त करते हैं। 10^2 में 10 आधार (base) तथा '2' घातांक कहलाता है। इसी प्रकार 5^3 में 5 आधार (base) तथा 3 घातांक है। 10^2 को '10 का वर्ग' पढ़ते है। इसी प्रकार 5^3 को '5 का घन' पढ़ते हैं। 10^2 को 100 का घातांकीय रूप कहते हैं । 5^3 को किस संख्या का घातांकीय रूप कहेंगे?

हम बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग कर संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। सामान्यत: बड़ी संख्याओं को पढ़ना, समझना और इनकी आपस में तुलना करना कठिन होता है। किन्तु संख्याओं को इनके घातांकीय रूप में व्यक्त करने से इनको पढ़ना, समझना तथा आपस में इनकी तुलना करना आसान हो जाता है।

किसी संख्या को बार-बार अपने आप से गुणा करने के बाद गुणनफल को घातांकीय रूप में लिखने की यह संक्षिप्त विधि अक्षर संख्याओं के लिए भी प्रयोग में लायी जा सकती है।



जैसे -

$x \times x = x^2$

$x \times x \times x = x^3$

x^2 को x का वर्ग पढ़ते हैं। इसी प्रकार, x^3 को x का घन पढ़ते है। ऐसा क्यों ? यदि x का घात 1 हो तो इसे x^1 नहीं लिखते। इसे केवल x ही लिखा जाता है।

इसी प्रकार,

$x \times x \times y \times y \times y$ को $x^2\, y^3$ तथा

$5 \times x \times x \times x \times y$ को $5x^3y$ लिख सकते हैं।

यदि a एक शून्येतर पूर्णांक तथा m, n दो पूर्णांक हैं तो -

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$

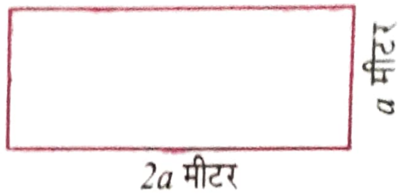
(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^0 = 1$

प्रयास कीजिए :

1. $5 \times x \times x \times x \times x$ को घातांकीय रूप में लिखिए।
2. $m \times m \times m$ को घातांकीय रूप में बदलिए।
3. $x \times x \times y \times y \times x$ का घातांकीय रूप क्या होगा?

उदाहरण 5: संलग्न चित्र के बने आयताकार फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल: आयताकार फर्श का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= (2a \times a)$ वर्ग मीटर

$= 2a^2$ वर्ग मीटर

उदाहरण 6: एक गाँव की वर्तमान जनसंख्या x है। वर्ष के अन्त में इसकी जनसंख्या y गुनी हो जाती है। इसी दर से वृद्धि होने पर चार वर्ष बाद गाँव की कुल जनसंख्या कितनी होगी?

हल :

गाँव की वर्तमान जनसंख्या $= x$

1 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या $= y \times x$

2 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या $= y \times (y \times x)$

$= y \times y \times x$

3 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या $= y \times (y \times y \times x)$

4 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या $= y \times (y \times y \times y \times x)$

$= y \times y \times y \times y \times x$

$= xy^4$

अत: 4 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या xy^4 होगी।

अभ्यास 5 (c)

1. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $c \times c \times c \times$..........5 बार (ii) $5 \times a \times a \times b \times b \times b$

(iii) $7 \times 7 \times 7$ (iv) $t \times t \times y \times y$

2. निम्नांकित को गुणा के रूप में लिखिए:

(i) $a^2 b^2$ (ii) $9ab^3$ (iii) $10x^3 y^3 z^3$

3. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए:

(i) $a \times a \times a \times$ ..... n बार (ii) $b \times b \times b \times b \times$ .... n बार

(iii) $3 \times 3 \times 4 \times 4 \times a \times a$ (iv) $a \times s \times t \times t$

4. एक व्यक्ति की वर्तमान आय ₹ a है। उसकी आय प्रतिवर्ष b गुनी हो जाती है। तीन वर्ष बाद उसकी आय कितनी होगी ?

5.5 चर और अचर

अधोलिखित सम्बन्ध का प्रयोग करते हुए, नीचे बनी तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

वृत्त का व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या

$$d = 2 \times r$$

तालिका -1

r (सेमी)	$2 \times r$ (सेमी में)	d (सेमी में)
3	2×3	6
5	... × ...	10
10	2 × ...	...
r	$2 \times r$	$2r$

उपर्युक्त सारणी में हमने देखा कि r का मान बदलने पर d का मान भी बदल जाता है। अर्थात् r तथा d के मान तो बदल जाते हैं, किन्तु 2 नहीं बदलता।

• एक कार 40 किमी/घंटा की चाल से जा रही है। कार द्वारा चली गयी दूरी , चाल एवं समय में संबंध निम्नांकित है :

दूरी = चाल × समय

$$s = 40 \times t$$

इस सम्बन्ध का प्रयोग करते हुए अधोलिखित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

तालिका -2

समय t घंटे में	40 × t (चाल × समय)	दूरी (s) किमी में
1	40 × 1	40
2	40 × ...	80
3	40 × 3	...
4	40 × 4	160
t	... × t	40t

उपर्युक्त दोनों तालिकाओं में हम देखते हैं कि कुछ राशियों का मान विभिन्न परिस्थितियों में बदलता रहता है और कुछ का मान परिस्थिति के अनुसार नहीं बदलता है। **जिनका मान परिस्थिति के अनुसार बदलता है वे चर तथा जिनका मान नहीं बदलता, वे अचर कहलाती हैं।**

तालिका- 1 में r, d चर हैं तथा 2 अचर है। इसी प्रकार **तालिका- 2** में t और S चर हैं तथा 40 अचर है। (क्यों ?)

क्रियाकलाप - 3

शिक्षक बन्द थैले में रखी वस्तुओं की संख्या तथा मेज पर रखी वस्तुओं की संख्या छात्रों को बताने के लिए कहेंगे तथा ज्ञात और अज्ञात राशियों में अन्तर स्पष्ट करेंगे और बतायेंगे कि अज्ञात राशियों के लिए हम अक्षरों का प्रयोग करते हैं तथा इनका मान निश्चित नहीं होता है, इसलिए इन्हें चर कहते हैं तथा ज्ञात अंकों को अचर कहते हैं क्योंकि इनका मान निश्चित रहता है।

उदाहरण 7 : कथन $y = \frac{22}{7} x^2$ में चर और अचर छांटिए।

हल : $y = \frac{22}{7} x^2$ में

चर : y तथा x

अचर : $\frac{22}{7}$

अभ्यास 5 (d)

1. निम्नलिखित कथनों में सत्य तथा असत्य कथन छाँटिए :

(i) x अचर राशि है।

(ii) 5 एक अचर राशि है।

(iii) $(x+5)$ एक अचर राशि है।

(iv) x^5 अचर राशि है।

2. निम्नलिखित कथनों में अचर लिखिए :

(i) $y = 4x$

(ii) $y = x + 7$

(iii) $x + y = 3$

(iv) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

दक्षता अभ्यास - 5

1. निम्नलिखित गणितीय कथनों पर ध्यान दीजिए तथा अपनी अभ्यास पुस्तिका में बाक्स के स्थान पर अक्षर संख्याओं के लिए संख्या लिखिए:

(i) $6 + 4 = x$

$6 + 4 = \square$

(ii) $3 \times 9 = y$

$3 \times 9 = \square$

(iii) $6 - 2 = a$

$6 - 2 = \square$

(iv) $b + 2 = 5$

$\square + 2 = 5$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) 10 में से x घटाने पर प्राप्त संख्या (ii) $2x$ और $3y$ को जोड़ने पर प्राप्त संख्या

(iii) y की 6 गुनी संख्या (iv) a में 3 का भाग देने पर प्राप्त संख्या

3. यदि $a=5$ तथा $b=9$, तो निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $a+10$ (ii) $b - 3$

(iii) $a + b - 14$ (iv) $a \times b$

(v) $30 + a$

4. विस्तृत रूप को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $x \times x \times x \times x \times y$ (ii) $q \times q \times q$

(iii) $2 \times y \times y \times y$ (iv) $5 \times 5 \times 5 \times x \times y \times y \times y$

(v) $m \times m \times m \times m$

5. रिक्त स्थानों □ की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए :

(i) $10 \times 10 \times 10 \times t \times t \times t = 10^{\square} \square^{\square}$ (ii) $4 \times 4 \times 4 = 4^{\square}$

(iii) $6 \times p \times p \times q \times q \times q = 6 \square^{2} q^{\square}$ (iv) $s \times s \times s \times t \times t = \square^{3} \square^{2}$

6. अधोलिखित कथनों को देखकर उसमें चर और अचर छाँटिए:

(i) $5x^2y^2z^3$ (ii) $7x^2y^2$

(iii) m^4n^2 (iv) a^3b^5

इस इकाई में हमने सीखा

1. जो अक्षर, संख्याओं को दर्शाने के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं, अक्षर संख्या या बीज कहलाते हैं। गणित की वह शाखा जिसमें बीजों के प्रयोग से समस्याएं हल की जाती हैं, **बीजगणित** कहलाती है।

2. x, y, z, a, b, c आदि अक्षर संख्याएं हैं, ये राशियाँ प्रकट नहीं करती हैं। जैसे यदि हम कमरे की लम्बाई x लिखते हैं तो यह अशुद्ध है। कमरे की लम्बाई x मीटर लिखना शुद्ध होगा।

3. अंक संख्याओं के समान ही अक्षर संख्याएं तथा अक्षर संख्याओं के समूह योग, अन्तर, गुणन तथा विभाजन की संक्रियाओं का पालन करती हैं एवं संक्रियाओं के प्रगुणों का भी पालन करती हैं।

4. आंकिक संख्याओं की भाँति ही अक्षर संख्याओं के घातांकीय रूप होते हैं।

5. ऐसी अक्षर संख्याएं, जिनका संख्यात्मक मान विभिन्न परिस्थितियों में बदलता रहता है, **चर** कहलाती हैं।

6. वे अक्षर संख्याएं जिनका संख्यात्मक मान हर परिस्थिति में अपरिवर्तित रहता है, **अचर** कहलाती हैं।

बीजगणित का प्रारम्भ

यह कहा जाता है कि गणित की एक शाखा के रूप में बीजगणित का प्रारम्भ लगभग 1550 ई पूर्व में अर्थात् आज से 3500 वर्ष पूर्व हुआ, जब मिस्रवासियों ने अज्ञात संख्याओं को व्यक्त करने के लिए संकेतों का प्रयोग करना प्रारम्भ किया था।

300 ई0 पूर्व के आस-पास भारत में अज्ञातों को अक्षरों से व्यक्त करना और व्यंजक बनाना एक बहुत सामान्य बात थी। अनेक महान भारतीय गणितज्ञों जैसे **आर्यभट्ट** (जन्म 476 ई0), **ब्रह्मगुप्त** (जन्म 598 ई0), **महावीर** (जो लगभग 850 ई0 में रहे) और **भास्कर-II** (जन्म 1114 ई0) तथा कई अन्य ने बीजगणित के अध्ययन में बहुत योगदान दिया। उन्होंने अज्ञात राशियों के लिए बीज, वर्ण इत्यादि जैसे नाम दिए और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के नामों के प्रथम अक्षरों के रूप में प्रयोग किया (जैसे काला से 'का' नीला से 'नी', इत्यादि)। **एल्जबरा (Algebra)** के लिए भारतीय नाम **बीजगणित** इन्हीं प्राचीन भारतीय गणितज्ञों के समय का है।

शब्द **एल्जबरा** लगभग 825 ई0 में बगदाद के एक अरब गणितज्ञ मुहम्मद इबन अल खोवारिज्मों द्वारा लिखित एक पुस्तक "अलजिबार वॉल अलमुगाबालाह' के शीर्षक से लिया गया है।

अभ्यास 5 (a)

1 $3x$ पेन्सिलें, 2. (i) $x+5=17$, $x=12$ (ii) $40-x=30, x=10$ (iii) $x\times6=24, x=4$ (iv) $35\div x=7, x=5$; 3. $10-x$, 4. $x+50=120$, 5. $3n, 4n$

अभ्यास 5 (b)

1. (i) $6+x$, (ii) $x-7$, (iii) $5x$, (iv) $\frac{x}{3}$; 2.(i) $d=2r$, d वृत्त का व्यास है तथा r वृत्त की त्रिज्या है।; (ii) $S = 4x$, S वर्ग का परिमाप है तथा x वर्ग की भुजा है। (iii) $A = x\times y$, A आयत का क्षेत्रफल है, x तथा y आयत की क्रमशः लम्बाई और चौड़ाई है।: (iv) I = S - C, I लाभ को प्रदर्शित कर रहा है, S विक्रय मूल्य को तथा C क्रय मूल्य को प्रदर्शित कर रहा है।; 3.(a) $(50-x)$ आम; (b). $(100-x)$ छात्र; 4. $(2x + 2y)$ मीटर; 5. $12x$ पैसे; 6. $\frac{x}{4}$ बालिकायें:7. $4a$ सेमी। 8. $(x-6)$ वर्ष, 9. $(16-x)$ लड्डू

अभ्यास 5 (c)

1. (i) c^5 (ii) $5a^2b^3$ (iii) 7^3 (iv) t^2y^2 2. (i) $a\times a\times b\times b$, (ii) $9\times a\times b\times b\times b$, (iii) $10\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z$; 3. (i) a^n , (ii) b^n , (iii) $3^2\times4^2\times a^2$, (iv) ast^2 , 4. ab^3

अभ्यास 5 (d)

1. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य 2. (i) 4, (ii) 7, (iii)3, (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 1

दक्षता अभ्यास 5

1. (i) 6 + 4 = 10, (ii) 3 × 9 = 27, (iii) 6 - 2 = 4 (iv) 10 ÷2 = 5; 2. (i) 10- x , (ii) $2x+3y$ (iii) $6y$ (iv) $\frac{a}{3}$, 3. (i)15, (ii) 6 (iii) 0, (iv) 45 (v) 6; 4. (i) $x^3 y$, (ii) q^3 , (iii) $2y^3$, (iv) $5^3x y^3$ (v) m^4 , 5. (i) 10^3t^3, (ii) 4^3 (iii) $6p^2q^3$ (iv) S^3t^2, 6. (i) 5अचर, $x, y,$ और z चर (ii) 7 अचर x, y चर (iii) m, n चर (iv) a, b चर