इकाई : 2 घातांक

AQT888

- घातांकों के नियम
- परिमेय संख्याओं को घात द्वारा व्यक्त करना
- धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक
- बड़ी एवं छोटी संख्याओं को घातांकीय रूप में व्यक्त करके उनकी तुलना करना

2.1 भूमिका

जैसा कि हम जानते हैं कि प्राकृतिक संख्याओं के अनन्त समूह में कोई भी संख्या सबसे बड़ी नहीं होती। अब एक संख्या 1000000000000000000000 लीजिए। क्या आप इसे आसानी से पढ़ सकते हैं ?

इसी प्रकार अब चाहे पृथ्वी का द्रव्यमान किग्रा में 59700000000000000000000000 हो या द्रव्य के मूल कण परमाणु के इलेक्ट्रान पर आवेश 0.0000000000000000016 कूलॉम्ब , सुगमता से दोनों ही नहीं पढ़े जा सकते हैं। फलस्वरूप इन संख्याओं अथवा ऐसी ही अन्य संख्याओं को पढ़ना उनका योग और अन्तर ज्ञात करना तथा कभी-कभी तुलना करना अथवा उपयुक्तानुसार गुणन, सामान्य विधियों द्वारा नितान्त दुश्कर है।

अतः ऐसा ही अध्ययन सम्बन्धी उत्पन्न गणितीय समस्याओं के निवारण के उद्देश्य से घातांकों को परिभाषित कर उनके प्रयोग की प्रणाली विकसित की गयी और वह आवश्यकतानुसार उपयोग में प्रयुक्त भी हुई।

इस अध्याय में अब हम संख्याओं के आधार और उनसे सम्बन्धित घात के बारे में चर्चा करेंगे और उनका प्रयोग किस प्रकार किया जाता है, यह भी सीखेंगे।

2.2 घातांक

आइये संख्या 100000 लें तथा उसे निम्न प्रकार लिखें

$$100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

10^5
10 की घात 5

यहाँ गुणन में संख्या 10 लगातार 5 बार प्रयुक्त हुई है। इसे संक्षिप्त रूप में 10^5 लिखा तथा दस की घात पाँच (ten to the power five) कहकर पढ़ा जाता है। संख्या के इस प्रकार के सांकेतिक रूप में संख्या 10 को आधार (base) तथा संख्या 5 को घात (Power of index or Exponent) कहा जाता है।

इसी प्रकार संख्या 10000 लें, तब

$$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \text{ है}$$

संख्या 10 गुणन में चार बार प्रयुक्त है। अतः हम 10000 को घातांक रूप में 10^4 लिखते हैं।

पुनः $100 = 10 \times 10$ है।

यहाँ पर संख्या 10 गुणन में दो बार प्रयुक्त है।

अतः 100 को हम 10^2 लिखते हैं। सँख्याओं को आधार और उनके संगत घात द्वारा लिखना उनका घातांकीय रूप कहलाता है।

दशमलव संख्याओं और कतिपय भिन्न संख्याओं को हम ऋण घातांकों द्वारा सुविधानुसार व्यक्त करते हैं।

जैसे $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

$0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

तथा इलेक्ट्रान पर आवेश

0.00000000000000000016 कूलम्ब को घातांकों के प्रयोग द्वारा 1.6×10^{-19} कूलॉम्ब सरल रूप में लिखते हैं।

इस प्रकार संख्याओं के बड़े और छोटे रूपों को संक्षिप्त रूप में लिखने और समझने में घातांकों का प्रयोग और उससे सम्बन्धित विषय सिद्धान्त द्वारा सरलता और सुगमता से प्रस्तुत कर सकते हैं।

क्रियाकलाप

वर्गतालिका

1 2	**2** 2×2	**3** 2×2×2	**4** 2×2×2×2	**5** 2×2..... 5बार	**6** 2×2... 6बार	**7** 2×2..... 7बार	**8** 2×2..... 8बार
9 2×2... 9बार	**10** 2×2... 10बार	**11** 2×2... 11 बार	**12** 2×2... 12 बार	**13** 2×2... 13 बार	**14** 2×2... 14 बार	**15** 2×2... 15 बार	**16** 2×2... 16बार
17 2×2... 17बार	**18** 2×2... 18बार	**19** 2×2... 19 बार	**20** 2×2... 20 बार	**21** 2×2... 21 बार	**22** 2×2... 22 बार	**23** 2×2... 23 बार	**24** 2×2... 24बार
25 2×2... 25बार	**26** 2×2... 26बार	**27** 2×2... 27 बार	**28** 2×2... 28 बार	**29** 2×2... 29 बार	**30** 2×2... 30 बार	**31** 2×2... 31 बार	**32** 2×2... 32बार
33 2×2... 33बार	**34** 2×2... 34बार	**35** 2×2... 35 बार	**36** 2×2... 36 बार	**37** 2×2... 37 बार	**38** 2×2... 38 बार	**39** 2×2... 39 बार	**40** 2×2... 40बार
41 2×2... 41बार	**42** 2×2... 42बार	**43** 2×2... 43 बार	**44** 2×2... 44 बार	**45** 2×2... 45 बार	**46** 2×2... 46 बार	**47** 2×2... 47 बार	**48** 2×2... 48बार
49 2×2... 49बार	**50** 2×2... 50 बार	**51** 2×2... 51 बार	**52** 2×2... 52 बार	**53** 2×2... 53 बार	**54** 2×2... 54 बार	**55** 2×2... 55 बार	**56** 2×2... 56बार
57 2×2... 57बार	**58** 2×2... 58 बार	**59** 2×2... 59 बार	**60** 2×2... 60 बार	**61** 2×2... 61 बार	**62** 2×2... 62 बार	**63** 2×2... 63 बार	**64** 2×2... 64बार

अध्यापक बच्चों को 2 की 2 से गुणन पुनरावृत्ति बड़े वर्ग के उपवर्ग संख्या तक करायें। गुणन की इस प्रकार की क्रिया एक के बाद अगले स्तर पर कठिन से कठिनतर होती जाती है। जैसे छठे उपवर्ग के लिए दो का गुणन $2\times2\times2\times2\times2\times2 = 64$ होगा। जिसे घातांक रूप में 2^6 लिखते हैं। अब इसी प्रकार यदि ध्यान से देखें तो 30 वें उपवर्ग में जो संख्या होगी, वह है 2×2×2.......... तीस बार = 107502824 = 2^{30} (सरलतम रूप में) अब सोंचे कि यदि हम 64वें खाने में इस प्रकार की दी गयी विधि से संख्या लिखने का प्रयास करे तो वह संख्या अंक प्रसार की दृष्टि से काफी बड़ी होगी। परन्तु सरलतम रूप में घातांकों के माध्यम से उसे 2^{64} लिखा जा सकता है। इस प्रकार घातांक की अभिधारणा बड़ी संख्याओं को सरल तरीके से लिखने में सहायक है और सहायता प्रदान करती है।

आधार 10 के अतिरिक्त अन्य आधार से सम्बन्धित संख्याओं को घाताकों में लिखना

उदाहरण 1 : 64 को घातांक में लिखिए।

हल : $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

संख्या 2 गुणन में 6 बार लगातार प्रयुक्त

$= 2^6$

यहाँ संख्या 64 को घातांक रूप में व्यक्त करने के लिए आधार संख्या 2 तथा घात 6 की संख्या प्रयुक्त हुई है।

पुनः लिखिए $64 = 4 \times 4 \times 4$

यहाँ संख्या 4 गुणन में 3 बार लगातार प्रयुक्त है

$\therefore \quad 64 = 4^3$

यहाँ यह सोचिए कि $64 = 2^6 = 4^3$ है तो यह घातांकों पर आधारित क्या किसी नियम के अनुसार सरलता से $2^6 = 4^3$ सीधे-सीधे लिखा जा सकता है।

इसके बारे में आगे जानने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 2 : निम्न 1,00,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000 को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : 1,00,00,00,00,00,00,00,00,00,00,000

$= 10 \times 10 \times 10................ \times 10$

यहाँ संख्या 10 गुणन रूप में 21 बार प्रयुक्त है।

अतः दी गई संख्या = 10^{21} है।

पुनः जिसमें दी गयी संख्या के लिए 10 आधार और संख्या 21 घातांक है।

2.3 संख्याओं के घातांकीय रूप में आधार एवं घातांक

निम्नांकित सारणी को देखिए :

घातीय संकेतन (घात) रूप	गुणा रूप	मान	आधार	घातांक
2^3	$2 \times 2 \times 2$	8	2	3
3^2	3×3	9	3	2
5^6	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	15625	5	6

प्रयास कीजिए :

1. 6^5 में आधार और घातांक बताइए।
2. 125 को घातांकीय रूप में लिखिए। आधार और उसका घातांक बताइए।
3. 343 को घातांकीय रूप में लिखिए। आधार और उसका घातांक बताइए।

यहाँ यह जानना आवश्यक है कि -
कुछ घातों के विशिष्ट नाम हैं।

उदाहरणार्थ -

(अ) 10^2, जो 10 की घात 2 है। इसे 10 का वर्ग (**10 square**) भी पढ़ा जाता है।

(ब) 10^3, जो 10 की घात 3 है। इसे 10 का घन (**10cube**) भी पढ़ा जाता है।

इस प्रकार 5^3 को 5 का घन पढ़ेंगे और जिसका अर्थ है :

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

उदाहरण 3 : ज्ञात कीजिए कि संख्याओं 3^4 तथा 4^3 में कौन सी संख्या बड़ी है और क्यों?

हल :

यहाँ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 81$

तथा $4^3 = 4 \times 4 \times 4$

$= 64$

हम पूर्व से जानते हैं कि $81 > 64$

अतः $3^4 > 4^3$

अर्थात् 3^4 तथा 4^3 में 3^4 ही बड़ी संख्या है।

इसे भी जानें

यह मात्र संयोग है कि विलक्षण प्रतिभा सम्पन्न भारतीय गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन (सन् 1887-1920 ने अपने विद्वान मित्र डॉ. जी.एच.हार्डी द्वारा अपने टैक्सी नम्बर 1729 को अशुभ और अप्रिय कहने पर उनके समक्ष ऐसा प्रथम बार प्रकाशित किया कि छोटी-से-छोटी यह वह अद्भुत संख्या है जिसे दो संख्याओं के योग के रूप में दो विभिन्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

रामानुजम संख्या 1729 है और यहाँ $1729 = 12^3 + 1^3$ तथा $1729 = 10^3 + 9^3$ है

उदाहरण 4 : ज्ञात कीजिए कि 2^8 और 8^2 में कौन सी संख्या बड़ी है।

हल : $2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

$8^2 = 64$

$256 > 64$ अर्थात् $2^8 > 8^2$

अतः 2^8 और 8^2 में 2^8 बड़ी संख्या है।

ध्यान दें कि पूर्णांकों की भाँति ही किसी परिमेय संख्या को उसी परिमेय संख्या द्वारा कई बार गुणन भी घातीय संकेतन द्वारा व्यक्त कर सकते हैं,

जैसे

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

जिसमें आधार $\frac{2}{3}$ तथा घातांक 4 है तथा इसे '$\frac{2}{3}$ की घात 4' पढ़ते हैं।

इसी तरह $\left(\frac{-5}{6}\right)\times\left(\frac{-5}{6}\right)\times\left(\frac{-5}{6}\right)\times\left(\frac{-5}{6}\right)\times\left(\frac{-5}{6}\right)=\left(\frac{-5}{6}\right)^5$ जिसमें आधार $\left(\frac{-5}{6}\right)$ तथा घातांक 5 है। इसे भी '$\left(\frac{-5}{6}\right)$ की घात 5' पढ़ेंगे।

ऋणात्मक आधार पर संख्याओं का संकेतन

आप संक्षिप्त रूप से लिखने की इस विधि को तब भी लागू कर सकते हैं, जब आधार एक ऋणात्मक पूर्णांक हो । सोचिए, $(-2)^3$ का क्या अर्थ है?

यहाँ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$ [(-2) की गुणन आवृत्ति 3 बार है।]

$= -8$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ [(-2) की गुणन आवृत्ति 4 बार है।]

$= +16$

ध्यान दें

अब यदि हम किसी अचर संख्या के स्थान पर किसी चर संख्या a को आधार ले, तो व्यापक रूप में संख्या को निम्नलिखित रूप में व्यक्त सकते हैं:

$a \times a \times a = a^3$ (इसे a की घात 3 या a का घन पढ़ेंगे)

$a \times a \times a \times a \times a = a^5$ (इसे a की घात 5 पढ़ेंगे)

उदाहरण 5 : - निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$(1)^5$, $(1)^7$, $(-1)^4$, $(-1)^5$, $(-5)^4$ और $(-10)^3$

हल : A. हमें प्राप्त है

$$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

B. इसी प्रकार

$$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

अतः 1 की किसी भी घात का मान सदैव 1 के बराबर होता है।

C. $$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$$

D. $$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

E. $$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (25) \times (25) = 625$$

F. $$(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$$

ध्यान दें कि

किसी ऋण संख्या को उसपर समघात द्वारा धन (Positive) तथा विषम घात द्वारा पूर्व की तरह एक ऋण (Negative) संख्या के रूप में अपरिवर्तित रखा जा सकता है।

घातीय संकेतन (घात) रूप	गुणा रूप	मान	आधार	घातांक
$(-3)^4$	$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$	81	-3	4
$(-5)^3$	$(-5) \times (-5) \times (-5)$	-125	-5	3
$(-7)^4$	$(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$	2401	-7	4
5^6	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	15625	5	6

निष्कर्ष :

उपर्युक्त सारणी में घात रूप में लिखी गयी संख्याओं के मान और उनके चिह्नों पर ध्यान देने पर हम देखते हैं कि : -

- n के कोई प्राकृतिक संख्या होने पर, $[\text{धन पूर्णांक}]^n$ = धन पूर्णांक
- n के सम प्राकृतिक संख्या होने पर, $[\text{ऋण पूर्णांक}]^n$ = धन पूर्णांक
- n के विषम प्राकृतिक संख्या होने पर, $[\text{ऋण पूर्णांक}]^n$ = ऋण पूर्णांक
- n के सम प्राकृतिक संख्या होने पर, $[-1]^n = 1$
- n के विषम प्राकृतिक संख्या होने पर, $[-1]^n = -1$

प्रयास कीजिए :

1. 5^3 और 3^5 में कौन सी संख्या बड़ी है।
2. $6 \times 6 \times 6 \times 6$ का आधार 6 पर घातीय संकेतन क्या है ?
3. $(-1)^{17}$ का मान बताइए।

अभ्यास 2 (a)

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ का मान है।

   (i) $\frac{32}{243}$ (ii) $\frac{-32}{243}$ (iii) $\frac{10}{15}$ (iv) $-\frac{10}{15}$

2. 3125 का घातीय संकेतन है :

   (i) 5^5 (ii) 5^2 (iii) 5^3 (iv) 5^4

3. '2 की घात 7' का मान है :

   (i) 49 (ii) 14 (iii) 128 (iv) 32

4. एक वर्गाकार क्यारी की भुजा 5 मी है। इसके क्षेत्रफल को घातीय संकेतन में लिखिए।
5. सरल कीजिये : (i) $2^4 \times 3^2$ (ii) $(-2)^3 \times (-10)^3$
6. 15625 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर 15625 को आधार 5 पर घातीय संकेतन के रूप में व्यक्त कीजिए।

2.4 घातांकों का नियम

नियम - 1 **एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणन**

उदाहरण आइए $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात करें

$$2^3 \times 2^4 = \underbrace{(2\times2\times2)}_{\text{तीन बार}} \times \underbrace{(2\times2\times2\times2)}_{\text{चार बार}}$$

$$2^3 \times 2^4 = \underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{\text{कुल 7 बार}}$$

$$= 2^7$$

$$2^3 \times 2^4 = 2^{(3+4)}$$

$$= 2^7$$

ध्यान दीजिए, यहाँ 2^3 और 2^4 में आधार समान है और घातांकों 3 और 4 का योगफल 7 है।

उदाहरण 6: (*a*) $4^3 \times 4^5$ (*b*) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^6$ को संक्षिप्त घात रूप में लिखिए

(*a*) $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ तथा $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

अतः $4^3 \times 4 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)$

$$= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

$$= 4^8 = 4^{(3+5)}$$

अर्थात्

$$4^3 \times 4^5 = 4^8 = 4^{(3+5)}$$

ध्यान दें यहाँ, 4^8 को 2^{16} भी लिखा जा सकता है।

(*b*) पुनः $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$ .... (1)

तथा $\left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$ .... (2)

अतः $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\right)$

सम्बन्ध (1) और (2) से

$$= \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{10} = \left(\frac{3}{5}\right)^{(4+6)}$$

अर्थात $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{4+6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

उदाहरण 7: $(-3)^2 \times (-3)^5$ **को ज्ञात कीजिए।**

$$(-3)^2 \times (-3)^5 = [(-3)\times(-3)] \times [(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)]$$
$$= (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$$
$$= (-3)^7$$

$$(-3)^2 \times (-3)^5 = (-3)^{2+5} = (-3)^7$$

उदाहरण 8: $a^3 \times a^4$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

$$a^3 \times a^4 = (a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a)$$
$$= \underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}_{\text{7 बार 'a' का गुणन}}$$
$$= a^7$$

इस प्रकार $a^3 \times a^4 = a^{3+4}$

$$= a^7$$

विशेष : ध्यान दीजिए उपर्युक्त सभी उदाहरणों में गुण्य और गुणक के आधार समान है।

प्रयास कीजिए :

1. $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$ को आधार $\frac{5}{6}$ पर घातीय संकेतन में लिखिए

खाली स्थान भरिये

2. $(-5)^2 \times (-5)^6 = (-5)^{\square}$
3. $a^2 \times a^3 = a^{\square}$

निष्कर्ष :

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनपूर्णांक हों, तो

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ है।

विशेष – $2^3 \times 3^2$ या $3^4 \times 4^3$ प्रकार के घातांकों पर ध्यान दीजिए। क्या इन्हें सरल मान हेतु घातांकों को जोड़ सकते हैं? शुद्ध उत्तर हेतु, नहीं। क्योंकि इन घातांकों के आधार समान नहीं हैं। इस प्रकार असमान आघार पर घाताकों का योग नियमतः अमान्य हैं।

नियम –2 एक ही आधार वाली घातांकीय संख्याओं के भाग का नियम :

आइए समान आधार परन्तु पृथक - पृथक घातों की संख्याओं का भाग करें।

उदाहरण 9: $2^7 \div 2^3$ को ज्ञात कीजिए।

$$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}$$

$$= 2\times2\times2\times2$$

$$= 2^4$$

इस प्रकार $2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

अतः $2^7 \div 2^3 = 2^4$

उदाहरण 10: $5^5 \div 5^3$ को ज्ञात कीजिए।

(i) $5^5 \div 5^3 = \frac{5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5}$

$$= 5 \times 5$$

$$= 5^2$$

$$5^5 \div 5^3 = 5^{5-3}$$

$$= 5^2$$

(ii) $a^4 \div a^2$ को ज्ञात कीजिए।

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a}$$

$$= a^2$$

अतः $a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{4-2}$

$$= a^2$$

यह भी जानें

बहुत पूर्व से ही महर्षि भारतीय विद्वान गणितज्ञों द्वारा 10^{17} (परार्ध) तक की बड़ी संख्याओं को लिखने और उनके नामकरण की पद्धति विकसित और स्पष्ट की गई थी।

इसी प्रकार $7^8 \div 7^5$ को ज्ञात कीजिए।

$$7^8 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

तथा $7^5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

अतः $7^8 \div 7^5 = \frac{7^8}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7}$

$$= \frac{(7\times7\times7\times7\times7)\times(7\times7\times7)}{(7\times7\times7\times7\times7)}$$

$$= (7\times7\times7)$$

$$= 7^3$$

अथवा $\frac{7^8}{7^5} = 7^{8-5}$

अर्थात् $7^8 \div 7^5 = 7^{(8-5)}$

$= 7^3$

इसी प्रकार

$$\left(\frac{5}{9}\right)^6 \div \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}}{\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)}{\left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)}$$

$$= \left(\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^{(6-4)}$$

अर्थात् $\left(\frac{5}{9}\right)^6 \div \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \left(\frac{5}{9}\right)^{(6-4)} = \left(\frac{5}{9}\right)^2$

प्रयास कीजिए :

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए

(i) $10^6 \div 10^2$ (ii) $2^9 \div 2^9$ (iii) $7^{13} \div 7^{10}$

इस प्रकार के अन्य उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँ m > n, तो $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$

पुनः देखिए,

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

तथा $3^7 = 3\times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अतः $3^4 \div 3^7 = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}$

$$= \frac{(3\times3\times3\times3)}{(3\times3\times3\times3)\times(3\times3\times3)}$$

$$= \frac{1}{(3\times3\times3)}$$

$$= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{(7-4)}}$$

अर्थात् $\frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^{(7-4)}}$

अतः $3^4 \div 3^7 = \frac{1}{3^{(7-4)}} = \frac{1}{3^3}$

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)}}{\cancel{\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{(9-4)}}$$

अर्थात् $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{(9-4)}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$

यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनपूर्णांक हों, तो $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ (जहाँ $m < n$)

$= 1$ (जहाँ $m = n$)

प्रयास कीजिए :

1. $4^3 \div 4^3 = 1$ होता है, इसकी सहायता से दिखाइए कि $4^0 = 1$.
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1$, अतः दिखाइए कि $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

हम देखते हैं कि

$$a^m \div a^m = 1$$

अतः $a^{m-m} = 1,$ [नियम - $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$ में $n = m$ मानने पर अर्थात घात समान करने पर]

अर्थात् $a^0 = 1$

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि

यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या है, तो $a^0 = 1$

टिप्पणी : यहाँ $a \neq 0$ मान्य नहीं है क्योंकि 0 से भाग करना परिभाषित नहीं है।

नियम - 3 : किसी घात वाली संख्या को ज्ञात करना :

उदाहरण 11 : $[(5)^3]^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$[(5)^3]^4 = (5)^3 \times (5)^3 \times (5)^3 \times (5)^3$$
$$= (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5)$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 5^{12}$$
$$= 5^{(3 \times 4)}$$

अर्थात् $[(5)^3]^4 = 5^{3\times 4}$

इसी प्रकार, $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)$

$$= \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times 3}$$

अर्थात् $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times 3}$

प्रयास कीजिए :

(i) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{(5\times 2)}$ **(ii)** $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{(4\times 3)}$

उपरोक्त विवेचन से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

यदि a एक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हों, तो $(a^m)^n = a^{(m\times n)}$

टिप्पणी : स्पष्ट रूप से उपर्युक्त नियम $a = 0$ के लिए भी सत्य है।

नियम 4 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

क्या आप $2^4 \times 3^4$ को सरल कर सकते हैं ?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान हैं किन्तु आधार अलग हैं।

हल, $2^4 \times 3^4$

$2^4 = 2\times 2\times 2\times 2$

तथा $3^4 = 3\times 3\times 3\times 3$

अतः $2^4\times 3^4 = (2\times 2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3\times 3)$

$= 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 3\times 3$

$= (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)$

$= (2\times 3)^4$

अर्थात् $2^4\times 3^4 = (2\times 3)^4$

इसी प्रकार से,

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$$

$$= \left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\right)^3$$

अर्थात् $$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{15}{28}\right)^3$$

इसी प्रकार से दिखाइए कि :

(i) $$\left(\frac{5}{6}\right)^5 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\right)^5 = \left(\frac{5}{7}\right)^5$$

(ii) $$\left(\frac{8}{9}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \left(\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

> **यदि a और b कोई दो परिमेय संख्याएँ हों तथा m एक धनपूर्णांक हो, तो $a^m \times b^m = (a \times b)^m$**

नियम 5 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग

यहाँ देखिए कि

$$8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \frac{8\times8\times8\times8\times8}{9\times9\times9\times9\times9}$$

$$= \frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^5$$

अर्थात् $$8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \left(\frac{8}{9}\right)^5$$

यह भी जानें

यूनानी गणितज्ञ डायफॅण्ट्स ने सर्वप्रथम यह रोचक साक्ष्य प्रकाशित किया कि दो संख्याओं के घनों के अन्तर को दो संख्याओं के घनों के योग के रूप मे भी व्यक्त किया जा सकता है। जैसे

$6^3 - 5^3 = 3^3 + 4^3$

या $216 - 125 = 27 + 64$

या $91 = 91$

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}\right)^3$$

अर्थात् $$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}\right)^3$$

प्रयास कीजिए :

इसी प्रकार निम्नांकित कथनों की जाँच कीजिए :

(i) $5^3 \div 6^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

(ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \div \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{8}}\right)^4$

(iii) $(20)^4 \div (4)^4$ को किस एक संख्या के घात 4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपर्युक्त अन्य उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हों तथा m एक धनपूर्णांक हो,

तो $a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ **तथा** $b^m \div a^m = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

टिप्पणी : प्रथम सम्बन्ध (1) यदि $a = 0$ हो तथा द्वितीय सम्बन्ध (2) यदि $b = 0$ हो तो भी सत्य होंगे।

उदाहरण 12: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \div \left(\frac{3}{4}\right)^8\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \div \left(\frac{3}{4}\right)^8\right\} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10-8}$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2+2}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{81}{256}$$

[**ध्यान दें,** यहाँ पर गुणन $(\times)$ संक्रिया से पहले भाग $(\div)$ क्रिया को नियमतः किया गया है।

सामूहिक चर्चा

1. $2^3 \times 2^6$ का आधार 2 पर घातीय संकेतन क्या होगा।
2. $(15)^0$ का मान क्या होगा।
3. $(1^3)^5$ का मान बताइए।
4. $(20)^4 \div (5)^4$ को किस संख्या के घात 4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ?

अभ्यास 2 (b)

1. सरल कीजिए :

(i) $3^7 \times 3^8$ **(ii)** $6^4 \times 6^2 \div 6^5$ **(iii)** $5^9 \times 5^4 \div 5^8$

(iv) $2 \times 5^2 + 5 \times 2^5$ **(v)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ **(vi)** $\left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(\frac{4}{9}\right)^5$

2. सरल कीजिए :

(i) $15^8 \times 15^{12} \div 15^{20}$ (ii) $25^3 \times 25^7 \div 25^{10}$

(iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(\frac{1}{2}\right)^8$ (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^5$

3. $(-1)^3 \times (-1)^2 \times (-1)^{15}$ का मान बताइए।

4. $(-1)^{49} \div (-1)^{25}$ का मान बताइए।

5. $3^{12} \times 3^7 \div 3^{25}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) $4 \times 4 \times 4 .. \times 4$ बीस बार $= (...)^{20}$ (ii) $8^6 \times 7^6 = (...)^6$

(iii) $\frac{9^{12}}{5^{12}} = \left(\frac{9}{...}\right)^{12}$ (iv) $(3^8)^3 = (3)^{...}$

(v) $(2^3)^5 = (2^5)^{......}$

प्रश्न संख्या 7 से 9 तक में सही उत्तर का विकल्प छाँटकर लिखिए :

7. $5^5 \times 8^5$ का निम्नलिखित में होगा :

(i) 40^5 (ii) 40^{10} (iii) 40^{25} (iv) 5^{40}

8. $(-3)^4 \div (-3)^2$ का मान होगा :

(i) 81 (ii) –81 (iii) 9 (iv) –9

9. $4 \times 5^2 + 5 \times 4^2$ का मान होगा :

(i) 100 (ii) 80 (iii) 200 (iv) 180

2.5 परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के सरल रूप की होती हैं। जहाँ p और q पूर्णांक होते हैं तथा $q \neq 0$; इस प्रकार सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं।

देखिए,

$$2 = (2)^1,\ 3 = (3)^1,\ \frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^1,$$

$$6 = (6)^1,\ 8 = (8)^1,\ 8 = (2)^3,$$

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{4}{9}\right)^1 \text{ तथा } \frac{4}{9} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{16}{625}=\left(\frac{16}{625}\right)^1, \frac{16}{625}=\left(\frac{4}{25}\right)^2 \text{ तथा } \frac{16}{625}=\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$\frac{-27}{343}=\left(\frac{-27}{343}\right)^1 \text{ और } \frac{-27}{343}=\frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{7\times7\times7}=\left(\frac{-3}{7}\right)^3$$

प्रयास कीजिए :

1. $\frac{16}{81}$ का आधार $\frac{4}{9}$ पर घात रूप बताइए।
2. किस भिन्न का घात रूप $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ है ?

ध्यान दें, जिस संख्या को घात रूप में केवल एक ही प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, उसका घातीय संकेतन (घात रूप) अद्वितीय होता है, जैसे, $\frac{5}{12}=\left(\frac{5}{12}\right)^1$, $6=6^1$, $3=3^1$, $17=17^1$ आदि।

यदि किसी संख्या को भिन्न-भिन्न आधारों पर घात रूप में व्यक्त किया जा सके तो उसका घातीय संकेतन अद्वितीय नहीं होता है। जैसे, परिमेय संख्या 729 को आधार 3 और 9 के घातीय संकेतनों में देखिए :-

$729 = 3^6$ आधार 3 घात 6
$729 = 9^3$ आधार 9 घात 3
$729 = 27^2$ आधार 27 घात 2

अतः उपर्युक्त उदाहरणों से हम पाते हैं कि :

1. **किसी भी परिमेय संख्या को उसके घात 1 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे, $a=(a)^1$**
2. **सभी अभाज्य संख्याओं का घातीय संकेतन अद्वितीय होता है।**
3. **भाज्य संख्याओं में कुछ का घातीय संकेतन अद्वितीय तथा कुछ का अद्वितीय नहीं होता है।**

पुनः देखिए,

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

तथा $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}$

अतः $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}$

इसी प्रकार,

$$\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^6$$

या, $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{4\times4\times4\times4\times4\times4}{7\times7\times7\times7\times7\times7}$

$$=\frac{4^6}{7^6}$$

अतः $\left(\frac{4}{7}\right)^6=\frac{4^6}{7^6}$

इसी प्रकार,

$$\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\ldots m \text{ बार }=\left(\frac{p}{q}\right)^m$$

तथा $\frac{p\times p\times p\ldots m \text{ बार}}{q\times q\times q\ldots m \text{ बार}}=\frac{p^m}{q^m}$

अतः $\left(\frac{p}{q}\right)^m=\frac{p^m}{q^m}$

इस तथ्य का उपयोग करके हम किसी परिमेय संख्या के घातीय संकेतन (घात रूप) को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। जबकि इसी प्रकार कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को किसी परिमेय संख्या के घात रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। जैसे,

$\left(\frac{6}{7}\right)^3=\frac{6^3}{7^3}=\frac{216}{343}$ $\left[\because\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}\right]$

और $\frac{216}{343}=\frac{6\times6\times6}{7\times7\times7}=\left(\frac{6}{7}\right)^3$

ध्यान दें, पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं के गुणन सूत्र $a^m\times b^m=(a\times b)^m$ का उपयोग करके भी कुछ परिमेय संख्याओं को घातीय संकेतन (घात रूप) में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे $=(a\,b)^m$

$(27 \times 343) = 3^3 \times 7^3 = (3 \times 7)^3 = (21)^3$

उदाहरण 13: संख्या 64×729 को आधार 6 पर घातीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।

हल : $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

अतः $64 \times 729 = 2^6 \times 3^6 = (2 \times 3)^6 = 6^6$ $[\because a^m \times b^m = (a \times b)^m = (a\,b)^m]$

अभ्यास 2 (c)

1. $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$ को घात रूप में व्यक्त कीजिए।
2. 15625 को आधार 5, आधार 25 एवं आधार 125 के घातीय संकेतनों में व्यक्त कीजिए।
3. 0.0001 को आधार 0.01 पर घात रूप में व्यक्त कीजिए।
4. $\frac{-343}{512}$ को आधार $\frac{-7}{8}$ पर घात रूप में व्यक्त कीजिए।
5. $\frac{1000}{1331}$ को आधार $\frac{10}{11}$ पर घातीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।
6. $\frac{1024}{1089}$ को वर्गरूप में व्यक्त कीजिए।
7. $\frac{512}{729}$ को घनरूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्न संख्या 8 से 10 तक में सही उत्तर का विकल्प छाँटिए :

8. 0.000001 का वर्ग रूप होगा :

   (i) $(0.01)^2$ **(ii)** $(0.001)^2$ **(iii)** $(0.0001)^2$ **(iv)** $(0.00001)^2$

9. $(0.05)^3$ का मान होगा :

   (i) 0.125 **(ii)** 0.0125 **(iii)** 0.00125 **(iv)** 0.000125

10. $\frac{64}{125}$ के घन रूप का आधार होगा :

   (i) $\frac{2}{5}$ **(ii)** $\frac{4}{5}$ **(iii)** $\frac{8}{25}$ **(iv)** $\frac{4}{25}$

2.6 धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक

घातांक (–1) का अर्थ

देखिए, $2 \times \frac{1}{2} = 1,$ या $2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$7 \times \frac{1}{7} = 1,$ या $7 = \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)}$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1,$ या $\frac{3}{4} = \frac{1}{4/3}$

इसी प्रकार यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तो,

$a \times \frac{1}{a} = 1,$ या $a = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}$

हम जानते हैं कि **ऐसी परिमेय संख्याएं जिनका गुणनफल 1 के बराबर होता है, एक दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम** (Inverse) **अथवा व्युत्क्रम** (Reciprocal) **कहलाती हैं।**

अतः उपर्युक्त उदाहरणों में 2 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{2}$ का गुणात्मक प्रतिलोम 2 है।

आप जानते हैं कि $10^2 = 10 \times 10$

$= 100$

$10^1 = \frac{10 \times 10}{10} = \frac{100}{10}$

यहाँ $1 = 10^0 = 10^{1-1} = 10^1 \times 10^{-1}$

$= \frac{10^1}{10^1} = \frac{10}{10} = 1$

यहाँ $1 = 10 \times 10^{-1}$

$\therefore \frac{1}{10} = 10^{-1}$

इस प्रतिरूप को आगे बढ़ाने पर

$10^{-1} = \frac{1}{10}$

$$10^{-2} = \frac{1}{10\times10} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10\times10\times10} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

ध्यान दीजिए जब घातांक क्रमशः 1कम होता है तब मान पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ अथवा दसवाँ भाग हो जाता है।

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

इस प्रकार $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ या $10^{2} = \frac{1}{10^{-2}}$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ या $10^{3} = \frac{1}{10^{-3}}$

इसी प्रकार $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$$\frac{3^3}{3} = \frac{3\times3\times3}{3} = \frac{27}{3}$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$\frac{3^2}{3} = \frac{3\times3}{3} = \frac{9}{3}$$

$$3^1 = 3$$

$$\frac{3^1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$3^0 = 1$$

अब, इस प्रकार इन प्रतिरूपों से हम कह सकते हैं कि

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

निष्कर्ष :

किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ जहाँ m एक धनात्मक परिमेय संख्या है। इस प्रकार a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

प्रयास कीजिए :

> (i) संख्या 7 का गुणात्मक प्रतिलोम क्या है ?
>
> (ii) $\frac{1}{5}$ किस संख्या का व्युत्क्रम है ?
>
> (iii) $\frac{4}{3}$ किस संख्या का व्युत्क्रम है ?
>
> (iv) संख्या a का गुणात्मक प्रतिलोम क्या होता है ? $(a \neq 0)$

हम जानते हैं कि a के गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a}$ को a^{-1} भी लिखा जाता है। इसे 'a की घात (-1)' अथवा 'a व्युत्क्रम' पढ़ते हैं। इस प्रकार 2 का गुणात्मक प्रतिलोम 2^{-1}, 7 का गुणात्मक प्रतिलोम 7^{-1} है तथा $\frac{3}{4}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ है।

अतः $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $\quad \frac{1}{7} = 7^{-1}$, $\quad \frac{4}{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

इसी प्रकार, $2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\quad 7 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$, $\quad \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

पुनः देखिए,

$8 \times \frac{1}{8} = 1,$

$\therefore \quad \frac{1}{8}$ = (8 का व्युत्क्रम) (गुणात्मक प्रतिलोम)

$= (8)^{-1}$

$8 = \frac{1}{1/8} = \frac{1}{8^{-1}}$

अर्थात् $\frac{1}{2^3} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$

इसी प्रकार, $\frac{1}{25}$ = 25 का व्युत्क्रम (गुणात्मक प्रतिलोम)

$\frac{1}{25} = (25)^{-1}$

अतः $\frac{1}{5^2} = (5^2)^{-1} = (5)^{-2}$

तथा $\frac{36}{49} = \frac{49}{36}$ का (गुणात्मक प्रतिलोम) $= \left(\frac{49}{36}\right)^{-1}$

अतः $\left(\frac{6}{7}\right)^{2} = \left[\left(\frac{7}{6}\right)^{2}\right]^{-1}$

$= \left(\frac{7}{6}\right)^{-2}$

उपर्युक्त तथ्य की संपुष्टि घातांक नियम (1) से भी कर सकते हैं, जैसे,

$a^{-3} \times a^{3} = a^{-3+3} = a^{0} = 1$

या $a^{-3} \times a^{3} = 1$

अतः $a^{-3} = \frac{1}{a^{3}}$ तथा $a^{3} = \frac{1}{a^{-3}}$

व्यापक रूप में, हम देखते हैं कि

$a^{-n} \times a^{n} = a^{-n+n} = a^{0} = 1$

या, $a^{-n} \times a^{n} = 1$

अतः $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$ और $a^{n} = \frac{1}{a^{-n}}$

उपर्युक्त उदाहरणों से निष्कर्ष निकलता है कि :

> **1. किसी शून्येतर परिमेय संख्या की (–1) घात, उस संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$ कोई शून्येतर परिमेय संख्या हो तो उसका व्युत्क्रम $\frac{b}{a}$ होता है अर्थात् $\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$**
>
> **2. यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा n कोई घनपूर्णांक हो तो a^{n} का गुणात्मक प्रतिलोम a^{-n} होता है और इसे 'a की घात (-n)' पढ़ते हैं।**

टिप्पणी :

घातों के ऋणात्मक होने की दशा में पिछले कुछ नियम निम्न प्रकार भी पुनः परिभाषित किये जा सकते हैं-

(i) $a^{m} \times a^{-n} = a^{m-n}$

(ii) $a^{-m} \times a^{n} = a^{-m+n}$

(iii) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

(iv) $a^{m} \div a^{-n} = a^{m} \times a^{n}$

(v) $a^{-m} \div a^{n} = a^{-m} \times a^{-n}$

(vi) $a^{-m} \div a^{-n} = a^{-m} \times a^{n}$

(vii) $(a^{m})^{-n} = a^{-mn} = (a^{-m})^{n}$

(viii) $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)\times(-n)} = a^{mn} = (a^{m})^{n}$

(ix) $a^{-m} \times b^{-m} = (a \times b)^{-m}$

उदाहरण 14: $(-5)^{-4} \times (-5)^{-3}$ को सरल कीजिए।

(A) $(-5)^{-4} \times (-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^4} \times \dfrac{1}{(-5)^3}$

$$\frac{1}{(-5)^4 \times (-5)^3} = \frac{1}{(-5)^{4+3}} = \frac{1}{(-5)^7} = (-5)^{-7}$$

(B) $(-7)^{-4} \times (-7)^{2}$ को सरल रूप में लिखिए।

$$= \frac{1}{(-7)^4} \times (-7)^2$$

$$= \frac{(-7)^2}{(-7)^4} = \frac{1}{(-7)^{4-2}}$$

$$= \frac{1}{(-7)^2}$$

$$= (-7)^{-2}$$

दूसरी विधि :

$(-7)^{(-4)+(2)}$

$= (-7)^{-2}$

उदाहरण 15: $(-25)^{-3}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $(-25)^{-3} = \dfrac{1}{(-25)^3} = \dfrac{1}{(-1)^3 \times (25)^3}$

$$= \frac{-1}{(-1)^4 \times (25)^3} = \frac{-1}{15625}$$

उदाहरण 16: $(2^5 \div 2^8)^5 \times 2^{-5}$ को सरल रूप में लिखिए।

$$\left(\frac{2^5}{2^8}\right)^5 \times 2^{-5} = (2^{5-8})^5 \times 2^{-5}$$

$= (2^{-3})^5 \times 2^{-5}$

$= 2^{-15} \times 2^{-5}$

$= 2^{(-15)+(-5)}$

$= 2^{-20} \qquad = \frac{1}{2^{20}}$

उदाहरण 17: $\frac{1}{8} \times (3)^{-3}$ को सरल रूप में लिखिए।

हल **प्रथम विधि :** $\frac{1}{8} \times (3)^{-3} = \frac{1}{2^3} \times 3^{-3}$

$= 2^{-3} \times (3)^{-3} = (2 \times 3)^{-3}$

$= (6)^{-3} \qquad = \frac{1}{6^3}$

द्वितीय विधि : $\frac{1}{8} \times (3)^{-3}$

$= \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{3^3}$

$= \frac{1}{(2 \times 3)^3} = \frac{1}{6^3}$

उदाहरण 18 : सरल कीजिए :

$2^5 \times (16)^{-2} \div 2^{-3}$

हल : प्रथम विधि :

$2^5 \times (16)^{-2} \div (2)^{-3}$

$= 2^5 \times \frac{1}{(16)^2} \div \frac{1}{2^3}$

$= 2^5 \times \frac{1}{(2^4)^2} \div \frac{1}{2^3}$

$= 2^5 \times \frac{1}{2^8} \times \frac{2^3}{1}$

$= \frac{2^5 \times 1 \times 2^3}{2^8 \times 1}$

$= \frac{2^5 \times 2^3}{2^8}$

$= \frac{2^{5+3}}{2^8} = \frac{2^8}{2^8} = 1$

द्वितीय विधि :

$2^5 \times (16)^{-2} \div (2)^{-3}$

$= 2^5 \times (2^4)^{-2} \times 2^3$

$= 2^5 \times 2^{-8} \times 2^3$

$= 2^{5-8+3}$

$= 2^0$

$= 1$

उदाहरण 19: सरल कीजिए : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

हल

: प्रथम विधि : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}} \div \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3^2}{4^2}} \div \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}}$$

$$= \frac{4^2}{3^2} \div \frac{3^4}{2^4}$$

$$= \frac{4^2}{3^2} \times \frac{2^4}{3^4}$$

$$= \frac{16}{9} \times \frac{16}{81}$$

$$= \frac{256}{729}$$

द्वितीय विधि : $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$$= \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 2}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$

$$= \frac{4}{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$$

$$= \frac{4}{1} \times \frac{64}{729}$$

$$= \frac{256}{729}$$

प्रयास कीजिए :

1. $(8)^2$ तथा $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$ का अन्तर मान बताइए।
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ का मान बताइए।
3. $(4)^{-4}$ का मान बताइए ?
4. निम्नांकित संख्या-युग्मों में प्रत्येक में कौन संख्या बड़ी है ?

   (i) 5^3 तथा 5^{-3} (ii) 2^2 तथा 2^{-2} (iii) 2^3 तथा $\frac{1}{2^{-3}}$

अभ्यास 2 (d)

1. $3^4 \times 3^5 \times 3^{-9}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ को सरल कीजिए।

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^2$ का मान होगा :

   (i) 2 (ii) 4 (iii) 8 (iv) 16

4. $3^{-2} \times 3^5$ का मान होगा :

   (i) 3 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) 27

5. निम्नांकित को सरल कीजिए :

   (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times 3^2 \div 3^{-3}$ (ii) $7^4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^3 \div 7$

   (iii) $3^0 + 3^{-1} + 3^{-2}$ (iv) $(3^3)^3 \div (3)^{25} \times (3^4)^4$

6. $(2 \times 3)^6 \times 6^{-3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. $\left\{(4 \times 5)^{-2} \div \left(\frac{1}{10}\right)^2\right\} + \frac{3}{4}$ को सरल कीजिए।

8. $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^0 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} \div \left(\frac{7}{5}\right)^2$ को सरल कीजिए।

9. निम्नांकित को सरल कीजिए :

   $2^{-2} - \{-2^{-3} - (2^{-2} - 3^{-2})\}$

2.7 बड़ी तथा छोटी संख्याओं को घातांकों में प्रकट करना

निम्नांकित को देखिए :

$54 = 5.4 \times 10 = 5.4 \times 10^1$

$540 = 5.4 \times 100 = 5.4 \times 10^2$

$5400 = 5.4 \times 1000 = 5.4 \times 10^3$

$54000 = 5.4 \times 10000 = 5.4 \times 10^4$ इत्यादि।

यहाँ हमने 54, 540, 5400, 5400 को मानक रूप (Standard Form) में व्यक्त किया है। इसी प्रकार

$$0.54 = 5.4 \times \frac{1}{10} = 5.4 \times 10^{-1}$$

$$0.054 = 5.4 \times \frac{1}{100} = 5.4 \times 10^{-2}$$

$$0.0054 = 5.4 \times \frac{1}{1000} = 5.4 \times 10^{-3}$$

$0.00054 = 5.4 \times \frac{1}{10000} = 5.4 \times 10^{-4}$, इत्यादि।

यहाँ भी संख्याओं को मानक रूप में ही व्यक्त किया गया है।

विशेष :

किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है परन्तु 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका 'मानक रूप' या 'वैज्ञानिक संकेतन' कहते है।

प्रयास कीजिए :

1. 2136 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।
2. वह संख्या कौन सी है जिसका मानक रूप 3.7×10^{-3} है?
3. 5.4 का मानक रूप 5.4×10^{0} होगा या 0.54×10^{-1} ?

मानक रूप या वैज्ञानिक संकेतन में संख्याएं $k \times 10^n$ के रूप में लिखी जाती हैं जहाँ $1 \leq k < 10$ तथा दशमलव की कोई संख्या है। तथा n कोई पूर्णांक है।

बड़ी और छोटी संख्याओं की आपस में तुलना करना

सूर्य का व्यास 1.4×10^9 मी और पृथ्वी का व्यास 1.2756×10^7 मी है। यदि हम इनके व्यासों की तुलना करना चाहें तो

सूर्य का व्यास $= 1.4 \times 10^9$ मी

पृथ्वी का व्यास $= 1.2756 \times 10^7$ मी

अतः $\frac{\text{सूर्य का व्यास}}{\text{पृथ्वी का व्यास}} = \frac{1.4 \times 10^9}{1.2756 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^{9-7}}{1.2756}$

$$= \frac{1.4\times10^2}{1.2756} \cong 100$$ जो कि लगभग 100 गुना है।

अतः सूर्य का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग 100 गुना है।

किसी बड़ी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना

आप जानते हैं कि बड़ी संख्याओं को घातांकों के प्रयोग द्वारा संक्षिप्त और सार्थक रूप में व्यक्त किया जा सकता है। आइए, बड़ी संख्याओं को घातांको के प्रयोग से मानक रूप में लिखने का प्रयास करें।

आप पढ़ चुके हैं कि संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए संख्या को 1.0 से 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या जिसमें 1.0 समाहित है, (परन्तु 10 नहीं) के द्वारा बदलते हैं।

उदाहरण के लिए 5985 का मानक रूप निम्न प्रकार होगा।

ज्ञात है, $5985 = 5.985 \times 1000$

$= 5.985 \times 10^3$

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा है जिसे घाताकों द्वारा भी लिखा और समझा जा सकता है।

$= 5.976 \times 10^{24}$ किग्रा है।

अब इस बात से आप सहमत होंगे कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या पूर्व में लिखी 25 अंकों द्वारा लिखी गई संख्या से समझने तथा लिखने में अधिक सरल है।

उदाहरण $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

(दशमलव बिन्दु 11 स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

$$0.000009 = \frac{9}{1000000} = \frac{9}{10^6} = 9\times10^{-6}$$

$= 9.0 \times 10^{-6}$

(दशमलव बिन्दु 6 स्थान दाईं ओर खिसक गया है)

विशेष

मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते समय संख्याओं को 10 के समान घात में बदलते हैं।

ध्यान दीजिए और विचार कीजिए :

5415 को 541.5×10, 54.15×100, 541.5×10^1 या 54.15×10^2 के रूप में भी लिखा जा सकता है। परन्तु ये सभी 5415 **के मानक रूप नहीं हैं**। इस प्रकार

$5415 = 0.5415 \times 10000 = 0.5415 \times 10^4$ भी 5415 का मानक रूप नहीं है।

क्या 54.15×10^{-2} संख्या 0.5415 का मानक रूप है ?

उदाहरण 20: निम्नांकित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए :

(i) 63000 (ii) 100000 (iii) 0.000045 (iv) 0.0001

हल : (i) $63000 = 6.3 \times 10000 = 6.3 \times 10^4$

[स्पष्टतः यहाँ $k = 6.3$ तथा $n = 4$]

(ii) $100000 = 1 \times 100000 = 1 \times 10^5 = 1.0 \times 10^5$

[स्पष्टतः यहाँ $k = 1.0$ तथा $n = 5$ है]

(iii) $0.000045 = \dfrac{4.5}{100000} = \dfrac{4.5}{10^5} = 4.5 \times 10^{-5}$

(iv) $0.0001 = \dfrac{1}{10000} = 1 \times \dfrac{1}{10^4} = 1 \times 10^{-4} = 1.0 \times 10^{-4}$

उदाहरण 21: एक व्यक्ति अपने दैनिक भोजन में प्रतिदिन औसतन 3000 कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करता है। वैज्ञानिक संकेतन में प्रदर्शित कीजिए कि वह पूरे 1 वर्ष में कितनी कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करेगा।

हल : ∵ 1 दिन में ग्रहण की गयी ऊर्जा = 3000 कैलोरी

∴ 365 दिन में ग्रहण की गयी ऊर्जा $= 365 \times 3000$ कैलोरी

= 1095000 कैलोरी

$= 1.095 \times 10^6$ कैलोरी

उदाहरण 22: एक अनुमान के अनुसार भारतीय रेल एक दिन में लगभग 1 करोड़ 30 लाख यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान पर पहुँचाती है। बताइए कि 30 दिनों में कितने यात्री रेल से यात्रा करते हैं। उत्तर मानक रूप में दीजिए।

हल : ∵ 1 दिन में यात्रा करने वाले रेल यात्रियों की संख्या = 1,30,00,000

∴ 30 दिन में यात्रा करने वाले रेल यात्रियों की संख्या $= 1,30,00,000 \times 30$

= 39,00,00,000

$= 3.9 \times 10^8$

उदाहरण 23: जनसंख्या गणना के अनुसार किसी दिन भारत की जनसंख्या 1,00,84,35,405 थी। इसे वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

हल : भारत की दी गई जनसंख्या = 1,00,84,35,405

= $1.008435405 \times 1,00,00,00,000$

= 1.008435405×10^9

= 1.008×10^9 लगभग

प्रयास कीजिए :

1.	425000 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।
2.	0.000035 को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।
3.	3.54×10^5 को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए।
4.	7.52×10^{-4} को सामान्य रूप में व्यक्त कीजिए।

अभ्यास 2 (e)

1. 62,00,00,000 को मानक रूप में लिखिए।
2. 0.00008 को वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।
3. वैज्ञानिकों का अनुमान है कि चन्द्रमा की उत्पत्ति आज से लगभग 460 करोड़ वर्ष पहले हुई थी। चन्द्रमा की आयु वैज्ञानिक संकेतन द्वारा व्यक्त कीजिए।
4. पृथ्वी की सूर्य से दूरी लगभग 15,00,00,000 किमी है। इस दूरी को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।
5. पृथ्वी का द्रव्यमान $5.98 \times (10)^{22}$ क्विंटल है। ज्ञात कीजिए कि साधारण संख्या के रूप में इसे लिखने पर 598 के आगे कितने शून्य रखने होंगे ?
6. निम्नांकित संख्याओं को वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए :

   (i) 4250000 (ii) दो करोड़ बीस लाख

   (iii) 0.000045 (iv) 0.0025
7. निम्नांकित को साधारण संख्या के रूप में लिखिए :

   (i) $2.5 \times (10)^4$ (ii) $1.75 \times (10)^6$

   (iii) $1.21 \times (10)^{-8}$ (iv) $4.5 \times (10)^{-5}$

   (v) $2.3 \times (10)^{-7}$ (vi) $2.5 \times (10)^{-4}$
8. एक इलेक्ट्रान का द्रव्यमान $9.107 \times (10)^{-28}$ ग्राम है। इसे साधारण दशमलव भिन्न में बदलने पर दशमलव बिन्दु (.) तथा अंक 9 के बीच कितने शून्य होंगे ?

दक्षता अभ्यास - 2

1. $(-8)^7$ के गुणारूप में लिखिए।
2. $(-1)^{999}$ का मान बताइए।
3. $3^8 \times 3^{12}$ का आधार 3 पर घातीय संकेतन लिखिए।
4. $9^7 \div 9^3$ का आधार 9 पर घातीय संकेतन लिखिए।
5. $8^{(5-5)}$ का मान बताइए।
6. $(2^3)^8$ का आधार 2 पर घातीय संकेतन बताइए।
7. -128 को (-2) के घातरूप में व्यक्त कीजिए।
8. $\left(\frac{7}{9}\right)^2 \div \left(\frac{14}{3}\right)^2$ को सरल कर मान ज्ञात कीजिए।
9. $(-4)^4$ किस संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम है ?
10. पृथ्वी से चन्द्रमा की औसत दूरी 384400000 मीटर है। इसे वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।
11. प्रकाश की एक किरण द्वारा वर्ष में तय की गयी दूरी 9460500000000000 मीटर है। इसे वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।
12. $2^{38} \times 5^{32}$ का मान ज्ञात कीजिए तथा बताइए इसमें कुल कितने अंक हैं।
[संकेत : $2^{38} \times 5^{32} = 2^6 \times 2^{32} \times 5^{32} = 2^6 \times (2 \times 5)^{32} = 64 \times (10)^{32} = 6.4 \times (10)^{33}$]
13. एक ग्राम दही में 10,00,000 वायरस होते हैं। इसे वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।
14. गाँव के एक स्कूल में विश्व स्वच्छता दिवस पर बच्चों से हाथ धोने का अभ्यास कराया गया। प्रत्येक बच्चा हाथ धोने में 2 मिनट का समय लगाता है। यदि कक्षा में 64 बच्चे हों तो पूरी कक्षा के बच्चों को बारी-बारी से हाथ धोने में लगे समय को घातांक में व्यक्त कीजिए।
15. एक कस्बे की आबादी के अधिकांश लोग श्वांस की बीमारियों से ग्रस्त थे, जाँच करने पर उस कस्बे की प्रदूषित वायु में 2000 विषाक्त जीवाणु प्रति घन मीटर पाये गये, जो कि एक सप्ताह में 100 गुना बढ़ जाते हैं। तीन सप्ताह बाद जीवाणुओं की संख्या को मानक संकेतांक में लिखिए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. संख्याएँ घातांकीय रूप में प्रकट की जा सकती हैं। घातांकों के प्रयोग से बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं को पढ़ना, समझना, तुलना करना और उन पर संक्रियाएँ करना सरल होता है।
2. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो संक्षेप में इस प्रकार हैं :

किन्हीं शून्येतर परिमेय संख्याओं a और b तथा पूर्ण संख्याओं m और n के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

(vii) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

(viii) $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

3. वैज्ञानिक संकेतन या मानक रूप में किसी संख्या को व्यक्त करने के लिए संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है तथा 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।

इसे भी जानें

1. जीव वैज्ञानिकों के अनुसार एक ग्राम मानव अपशिष्ट में 100 जीवाणु अण्डे, 1000 जीवाणु कोश, 10,00,000 बैक्टीरिया तथा 1,00,00,000 वायरस होते हैं।
2. किसी जीवाणु की नाप 0.00000005 सेमी0 या 5.0×10^{-8} मी0 होता है।
3. पृथ्वी से सूर्य की दूरी 1,49,60,00,00,000 मी0 या 1.49×10^{11} मी0 होती हैं।
4. पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी लगभग 38,44,67,000 मी0 या 3.84467×10^{8} मीटर होती है।
5. पृथ्वी में 1,35,30,00,000 किमी^{3} या 1.353×10^{9} किमी^{3} समुद्र जल है।
6. एक आकाश गंगा में औसतन 1,00,00,00,00,000 या 1.0×10^{11} तारे हैं।

उत्तरमाला

अभ्यास 2 (a)

1. (ii) $-\frac{32}{243}$; **2.** (i) 5^5; **3.** (iii) 128; **4.** 5^2 वर्ग मी; **5.** (i) 144, (ii) 8000 ; **6.** 5^6;

अभ्यास 2 (b)

1. (i) 3^{15}, (ii) 6, (iii) 5^5, (iv) 210, (v) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$, (vi) $\left(\frac{4}{9}\right)^2$, **2.** (i) 1, (ii) 1, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; **3.** 1; **4.** 1; **5.** 3^{-6}; **6.** (i) 4, (ii) 8 x 7 या 56, (iii) 5, (iv) 24, (v) 3, **7.** (i) $(40)^5$;

8. (iii) 9; **9.** (iv) 180;

अभ्यास 2 (c)

1. $(12)^6$; **2.** $5^6, (25)^3, (125)^2$; **3.** $(.01)^2$; **4.** $\left(\frac{-7}{8}\right)^3$; **5.** $\left(\frac{10}{11}\right)^3$; **6.** $\left(\frac{32}{33}\right)^2$; **7.** $\left(\frac{8}{9}\right)^3$; **8.** (ii) $(0.001)^2$; **9.** (iv) 0.000125; **10.** (ii) $\frac{4}{5}$

अभ्यास 2 (d)

1. 1; **2.** $\frac{4}{9}$; **3.** (iv) 16; **4.** (iv) 27; **5.** (i) 3^7, (ii) 1, (iii) $\frac{13}{9}$, (iv) 1, **6.** 216; **7.** 1; **8.** 1, **9.** $\frac{37}{72}$

अभ्यास 2 (e)

1. 6.2×10^8; **2.** 8.0×10^{-5}; **3.** 4.6×10^9 वर्ष; **4.** 1.5×10^8 किमी; **5.** 20; **6.** (i) 4.25×10^6, (ii) 4.5×10^{-5}, (iii) 2.2×10^7; (iv) 2.5×10^{-3}; **7.** (i) 25000, (ii) 1750000 (iii) 0.0000000121, (iv) 0.000045, (v) 0.00000023, (vi) 0.00025; **8.** 27

दक्षता अभ्यास 2

1. $(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8)$; **2.** –1; **3.** 3^{20}; **4.** 9^4; **5.** 1; **6.** 2^{24}; **7.** $(-2)^7$; **8.** $\frac{1}{36}$; **9.** $(4)^{-4}$ या $(-4)^{-4}$; **10.** 3.844×10^8 मीटर **11.** 9.4605×10^{15} मीटर, **12.** 6.4×10^{33}, **13.** 10^7, **14.** 2^7 मिनट, **15.** 2.0×10^9