इकाई 5 त्रिभुज

- पाइथागोरस प्रमेय की अवधारणा
- पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन
- पाइथागोरियन त्रिक
- भिन्न-भिन्न शर्तों के आधार पर त्रिभुजों की रचना
- त्रिभुज के शीर्षलम्ब, लम्ब केन्द्र
- त्रिभुज की मध्यिकाएँ एवं केन्द्रक
- त्रिभुज के लम्बार्धक एवं परिकेन्द्र
- त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक एवं अन्तःकेन्द्र
- समरूप त्रिभुज के गुणधर्म
- दी गयी भुजाओं के अनुपात के आधार पर समरूप त्रिभुजों की रचना।

5.1 भूमिका :

आप पढ़ चुके हैं कि त्रिभुज,तीन रेखाखंडों से बनी एक सरल बन्द आकृति है। इसमें तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं। त्रिभुजों का वर्गीकरण भुजाओं और कोणों के आधार पर किया गया है। भुजाओं के आधार पर तीन प्रकार के त्रिभुज होते हैं **समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु त्रिभुज**। कोणों के आधार पर तीन प्रकार के त्रिभुज होते हैं, **न्यूनकोण, अधिक कोण और समकोण त्रिभुज**। इन त्रिभुजों की रचना भी आपने सीखी हैं। समकोण त्रिभुज के प्रगुण भी आप जान चुके हैं। इस इकाई में समकोण त्रिभुज के एक महत्वपूर्ण प्रगुण के बारे में पढ़ेंगे जो पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

यूनानी ज्यामिति विशेषज्ञ पाइथागोरस (Pythagoras) 570 -500 ई0पू0 ने समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित एक बहुत उपयोगी और महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जिसे पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है । भारतीय गणितज्ञ बौधायन (800 ई0पू0 लगभग) ने समकोण त्रिभुज के इसी प्रमेय का उल्लेख एक आयत के संदर्भ में पाइथागोरस से लगभग 300 वर्ष पूर्व ही किया था। इससे स्पष्ट होता है कि इस प्रमेय का प्रयोग भारतवर्ष में बहुत पहले से होता रहा है किन्तु आज इस प्रमेय को हम जिस रुप में पढ़ते हैं वह यूनान के ज्यामितीय विशेषज्ञ पाइथागोरस के नाम से जाना जाता है।

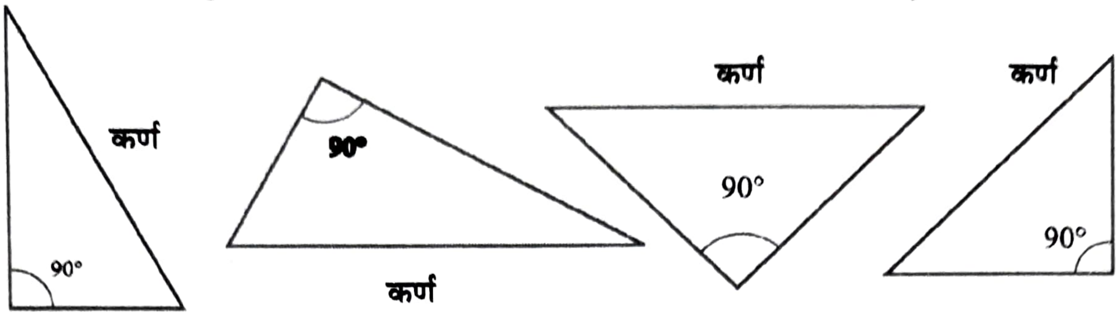
यहाँ हम पाइथागोरस प्रमेय को विस्तार से अध्ययन करेंगे ।

इसके साथ ही त्रिभुज की कुछ विशेष रचनाओं एवं त्रिभुज शीर्ष लम्ब एवं लम्बकेन्द्र, माध्यिकायें एवं गुरूत्वकेन्द्र, त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक एवं परिकेन्द्र और त्रिभुज के कोणों के अर्द्धक एवं अंतःकेन्द्र का अध्ययन करेंगे। इनके अतिरिक्त समरूप त्रिभुजों के बारे में भी अध्ययन करेंगे।

इसे कीजिए :

समकोण त्रिभुज :

निम्नांकित त्रिभुजों को देखिए। कोणों के आधार पर ये किस प्रकार के त्रिभुज हैं ? समकोण की सम्मुख भुजा और शेष दो भुजाओं को नापिए और बताइए कि इनमें सबसे बड़ी भुजा कौन है?



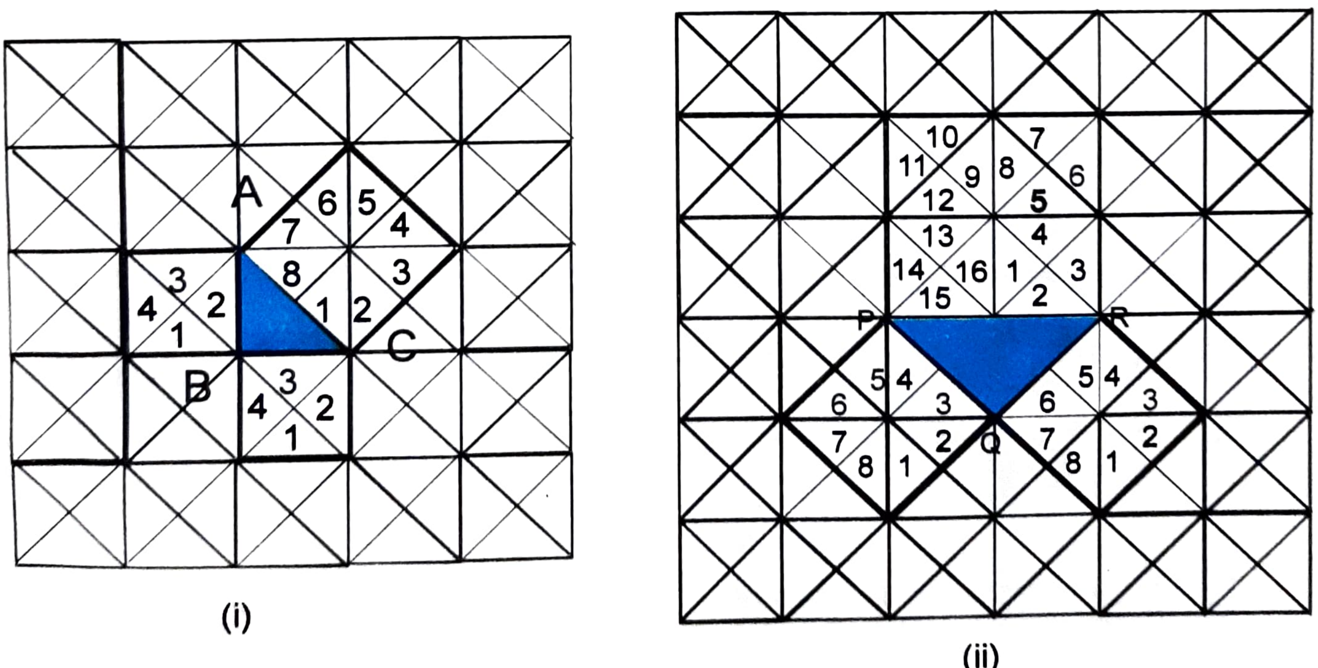
हमने देखा कि समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा सबसे बड़ी है। इस भुजा को **कर्ण** कहते हैं।

> **समकोण त्रिभुज में समकोण की सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं। यह समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं से बड़ी होती है।**

इसे कीजिए :

5.2 पाइथागोरस प्रमेय की अवधारणा

आकृति 5.1 (i) और (ii) में बने दोनों छायांकित समकोण त्रिभुजों ABC और PQR को देखिए। दोनों त्रिभुजों की सभी भुजाओं पर बाहर की ओर वर्ग बने हैं। ये सभी वर्ग समान प्रकार के छोटे-छोटे सर्वांगसम त्रिभुजों से ढके हैं।



आकृति 5.1

Δ ABC के कर्ण AC पर बने वर्ग के छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या कितनी हैं ? समकोण बनाने वाली भुजाओं AB तथा BC पर बने वर्गों में छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या का योग कितना है ?

हम देखते हैं कि समकोण ABC के कर्ण AC पर बने वर्ग में छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या 8 है और समकोण बनाने वाली भुजाओं AB तथा BC पर बने वर्गों में त्रिभुजों की संख्याओं का योग 4+4=8 के बराबर है।

इसी प्रकार ΔPQR में कर्ण PR पर बने वर्ग में 16 त्रिभुजों तथा समकोण बनाने वाली भुजाओं QR तथा PQ पर बने वर्गों में 8-8 त्रिभुज हैं। इनका योग कर्ण PR पर बने वर्ग 16 त्रिभुजों के बराबर है इसकी जांच कीजिए।

प्रयोग 1

एक समकोण त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें $\angle$BCA समकोण हो और BC = 4 मात्रक तथा CA = 3 मात्रक हों। नापने पर कर्ण AB = 5 मात्रक। AB, BC और CA पर बाहर की ओर वर्ग खींचिए। इनमें से प्रत्येक वर्ग को एकांक वर्गों में विभाजित कीजिए, जैसा निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित है।

हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा^{2}

$\therefore$ AB पर बने वर्ग का क्षेत्रफल = 5^2 वर्ग मात्रक

= 25 वर्ग मात्रक

BC पर बने वर्ग का क्षेत्रफल = 4^2 वर्ग मात्रक

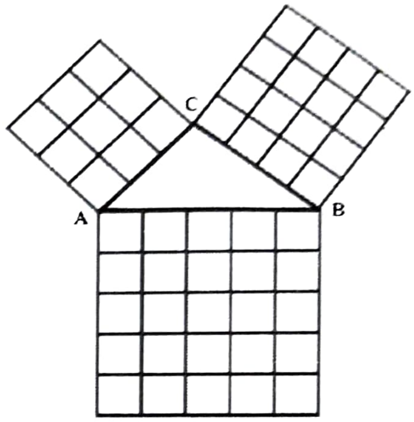
= 16 वर्ग मात्रक

CA पर बने वर्ग का क्षेत्रफल = 3^2 वर्ग मात्रक

= 9 वर्ग मात्रक

BC और CA पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों का योग = (16 + 9) वर्ग मात्रक

= 25 वर्ग मात्रक



आकृति 5.2

हम देखते हैं कि कर्ण AB पर बने वर्ग का क्षेत्रफल 25 वर्ग मात्रक तथा शेष दोनों भुजाओं BC और CA पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योगफल 25 वर्ग मात्रक के बराबर है।

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि :

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

इस कथन को पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं।

उपर्युक्त प्रमेय का कथन निम्नलिखित रूप में भी किया जाता है :

समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है ।

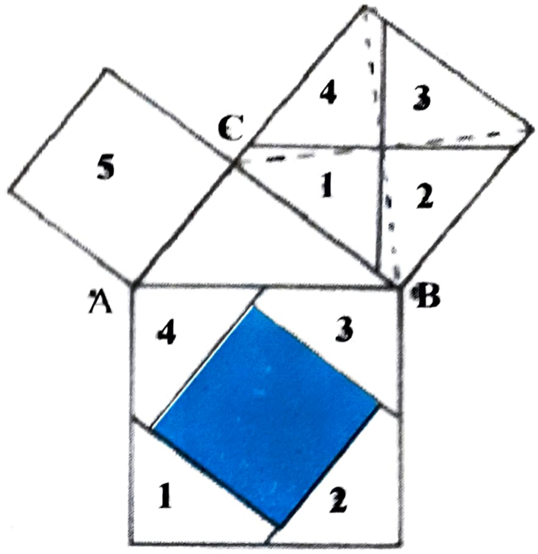
अथवा

$a^2 + b^2 = c^2$, **जहाँ** c **समकोण त्रिभुज का कर्ण तथा** a **और** b **उसकी शेष भुजाओं की मापें हैं ।**

प्रयोग 1- पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन (कट तथा पेस्ट विधि से)

एक मोटे कागज पर एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसका $\angle BCA$ समकोण हो और उसकी तीनों भुजाओं पर बाहर की ओर वर्गों की रचना कीजिए। अब BC पर बने वर्ग का केन्द्रीय बिन्दु (वह बिन्दु जहाँ पर उसके विकर्ण एक दूसरे को काटते हैं।) ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु से त्रिभुज के कर्ण AB के समान्तर तथा उस पर इसी बिन्दु से होकर लम्ब रेखाएँ खींचिए। अब वर्ग को इन रेखाओं की सीध में काट कर उन पर 1, 2, 3 और 4 लिख दीजिए। इन चार टुकड़ों और CA पर बने वर्ग 5 को काटकर AB पर बने वर्ग पर चित्रानुसार इस प्रकार रखिए कि

आकृति 5.3 के समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग के शीर्षों पर समायोजित हो जायें। शेष भाग AC के वर्ग 5 से ढँक जायेगा।



आकृति 5.3

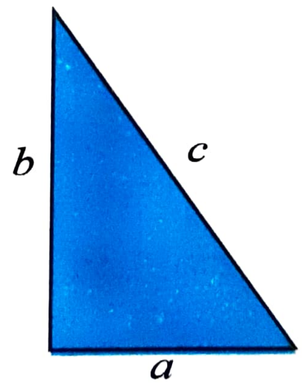
अब चित्र से पूर्णतः स्पष्ट है कि वर्ग BC के चार टुकड़े तथा CA पर बना वर्ग, कर्ण AB पर बने वर्ग को पूरा-पूरा ढँक लेते हैं। इससे पाइथागोरस प्रमेय की सत्यता प्रमाणित होती है।

सम्बन्ध $c^2 = a^2 + b^2$ से स्पष्ट है कि $c^2 > a^2$ तथा $c^2 > b^2$, अतः $c > a$ तथा $c > b$. इस प्रकार किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।

प्रयोग - 2

एक मोटा रंगीन कागज ले कर किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज बनाइए। अब इसी के चार प्रतिरूप बनाइए।

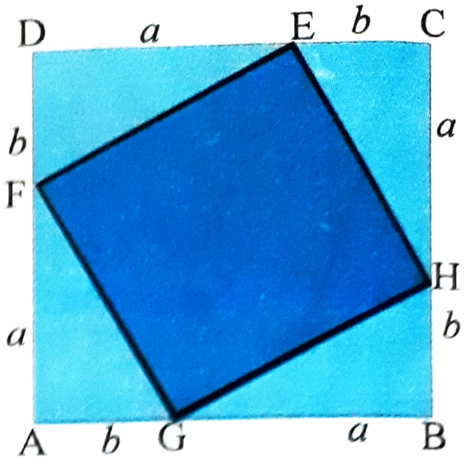
उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं। आधार भुजा की लम्बाई a इकाई, दूसरी भुजा की लम्बाई b इकाई और कर्ण की लम्बाई c इकाई है। कर्ण की लम्बाई c इकाई की नाप के बराबर भुजा का एक वर्ग बनाइए। किसी अन्य एक कागज पर $(a + b)$ इकाई लम्बाई के भुजा के वर्ग की किसी अन्य रंग की आकृति बनाइए।



आकृति 5.4

अब अपने बनाए हुए 4 त्रिभुजों को C भुजा के वर्ग के साथ आकृति 5.5 के अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

यह $(a+b)$ भुजा का वर्ग बन जाता है।



आकृति 5.5

$(a+b)$ भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

= 4 × समकोण का क्षेत्रफल (जिसकी भुजाएँ a और b हैं)+ c लम्बाई भुजा का वर्ग

$$(a+b)^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} a \times b\right) + c^2$$

$$(a+b)^2 = 2a\,b + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

उपरोक्त दोनों प्रयोगों के आधार पर कहा जा सकता है :

किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल शेष दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होता है।

बौधायन

बौधायन के जन्मस्थान, माता पिता परिवार की जानकारी उपलब्ध नहीं है। इतिहासकार इनका काल ईसा पूर्व लगभग 800 वर्ष मानते हैं। सर्वप्रथम इन्होंने बौधायन शुल्व सूत्र का उद्धरण दिया जिसे आज पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। यह सूत्र निम्न है -

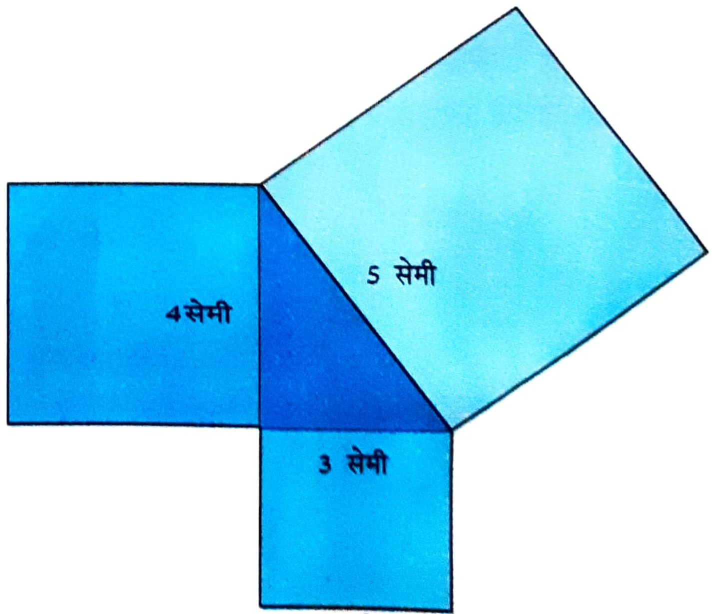
दीर्घ चतुरश्र (आयत) की अन्कया रज्जु (कर्ण) पर बना वर्ग पार्श्वमानी (आधार) तथा तिर्यङ्मानी (लम्ब) पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

5• 5 • 1 पाइथागोरस प्रमेय का विलोम :

इसे कीजिए :

प्रयोग संख्या - 3

3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी लम्बी भुजाओं के तीन वर्ग कागज से काटिए । एक कागज के ऊपर इन तीनों वर्गों के तीन शीर्षो को मिलाते हुए आकृति 5.6 के अनुसार इस प्रकार रखिए कि उनकी भुजाओं से एक त्रिभुज बन जाये । इस प्रकार बने त्रिभुज को कागज पर चिन्हित कीजिए। इस त्रिभुज के कोणों को मापिए । आप देखेंगे कि इनमें केवल 5 सेमी भुजा के सामने का कोण समकोण है।



आकृति 5.6

ध्यान दीजिए कि यहाँ

$3^2 + 4^2 = 5^2$, $4^2 + 5^2 \neq 3^2$ तथा

$3^2 + 5^2 \neq 4^2$.

प्रयोग संख्या - 4

उपर्युक्त प्रक्रिया को 4सेमी., 5 सेमी तथा 7सेमी भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर फिर दोहराइए । इस बार आप को अधिक कोण त्रिभुज प्राप्त होगा । यहाँ भी ध्यान दीजिए कि

$4^2 + 5^2 \neq 7^2$, $\quad 7^2 + 5^2 \neq 4^2$

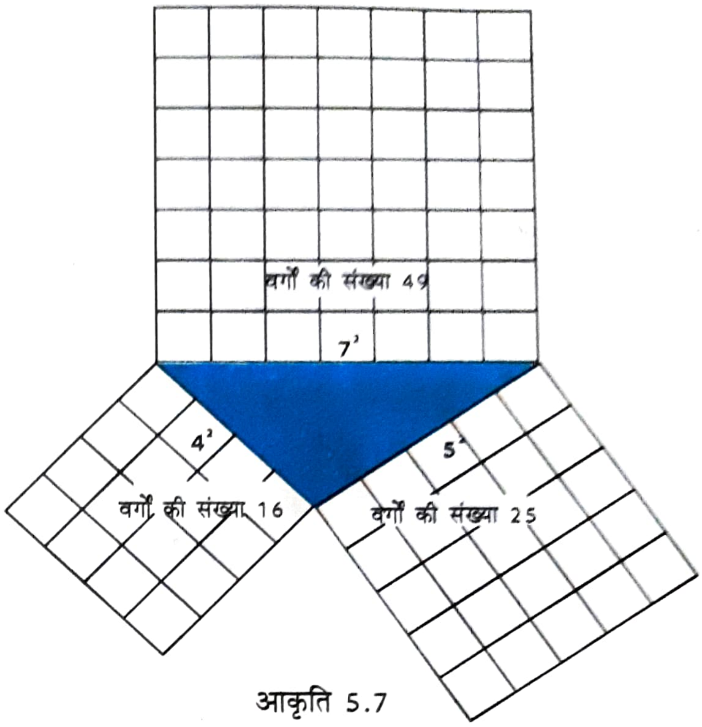
तथा $4^2 + 7^2 \neq 5^2$

$16 + 25 \neq 49$, $\quad 49 + 25 \neq 16$

$16 + 49 \neq 25$

$41 \neq 49$, $\quad 74 \neq 16$

$65 \neq 25$



आकृति 5.7

इस प्रक्रिया से पता चलता है कि पाइथागोरस प्रमेय केवल तभी लागू होता है जब, त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा।

इसी प्रकार 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर पूर्व प्रक्रिया दोहराने से प्राप्त त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय सिद्ध होता है या नहीं।जाँच कीजिए।

इसे भी कीजिए :

I. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 3 सेमी तथा CA = 4 सेमी हो।

हम देखते हैं कि :

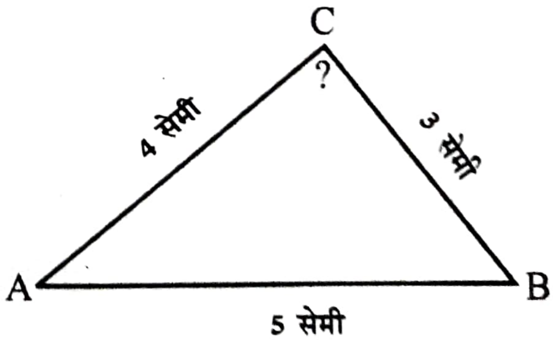
$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

$= 25$

$\angle ACB$ मापिए और उसकी माप रिक्त स्थान में लिखिए।

$\angle ACB = ...$

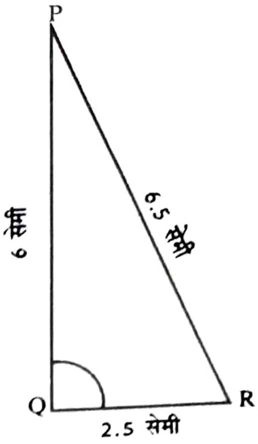


आकृति 5.8

II. ΔPQR की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 6$ सेमी, $QR = 2.5$ सेमी और $PR = 6.5$ सेमी हो। यहाँ $(2.5)^2 + 6^2 = (6.5)^2$ है।

$\angle PQR$ को मापिए और माप को रिक्त स्थान पर लिखिए :

$\angle PQR = ...$



आकृति 5.9

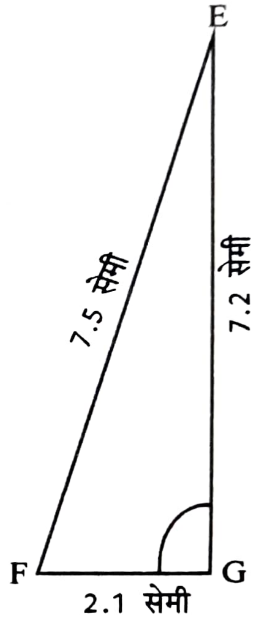
III. पुनः यही प्रयोग त्रिभुज EFG के साथ कीजिए, जिसमें $FG = 2.1$ सेमी, $EG = 7.2$ सेमी और $FE = 7.5$ सेमी हो।

यहाँ $(2.1)^2 + (7.2)^2 = (7.5)^2$

यहाँ $\angle EGF$ को मापिए और माप को रिक्त स्थान में लिखिए :

$\angle EGF = ...$

हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज का एक कोण 90^0 है।



आकृति 5.10

निष्कर्ष :

यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा पर बना वर्ग, शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है। यही प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है।

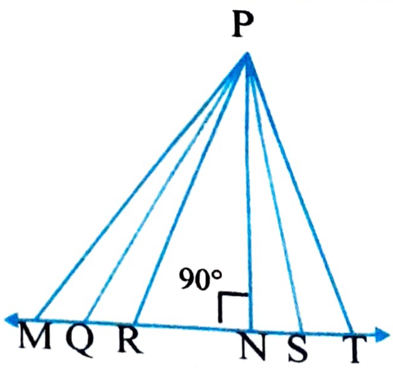
किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण, अन्य दो भुजाओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

इसे भी कीजिए :

- **रेखा *l* के बाहर कोई बिन्दु P लीजिए।**
  P से रेखा *l* पर लम्ब PN खींचिए।

P से इस लम्ब के अतिरिक्त अन्य रेखाखंड PR, PQ, PM, PS तथा PT खींचिए। इन सब रेखाखंडों को माप कर बताइए कि कौन रेखाखंड सबसे छोटा है।

हम देखते हैं कि PN सबसे छोटा रेखाखंड है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि :



आकृति 5.11

> किसी रेखा के बाहर दिये हुए किसी बिन्दु से जो भी रेखाखंड इस रेखा तक खींचे जा सकते हैं, उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है।

5.3 पाइथागोरियन त्रिक (Pythagorean Triplets)

यदि किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लम्बाई $2n$ और n^2-1 हैं तो कर्ण की लम्बाई n^2+1 होगी क्योंकि

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2 \text{ जबकि } n > 1$$

अतः $2n, n^2 - 1, n^2 + 1$ को पाइथागोरियन त्रिक कहते हैं।

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

भुजा / n	BC n^2-1	AB $2n$	AC n^2+1	$AC^2 = BC^2 + AB^2$ ....
2	3	4	5	....
3	8	6	10	....
4	15	8	17	.....
5	24	10	26	.....

उदाहरण : दिखाइए कि 8, 9 और 12 पाइथागोरियन त्रिक नहीं हैं।

हल :

$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$8^2 + 9^2 = 64 + 81$

$= 145 \quad .... (1)$

तथा $12^2 = 144 \quad .... (2)$, (1) और (2) की तुलना द्वारा, $8^2 + 9^2 \neq 12^2$

अतः 8, 9 और 12 पाइथागोरियन त्रिक नहीं हैं।

कुछ पाइथागोरियन त्रिक ज्ञात करने की विधि :

पाइथागोरियन त्रिक 3, 4, 5 लीजिए।

यहाँ $5^2 = 3^2 + 4^2$

या $25 = 9 + 16 = 25$

(3, 4, 5) को 2 से गुणा कीजिए,

$3 \times 2, 4 \times 2, 5 \times 2$ अर्थात् 6, 8, 10

6, 8, 10 पाइथागोरियन त्रिक हैं।

जाँच कीजिए।

हल : $10^2 = 6^2 + 8^2$

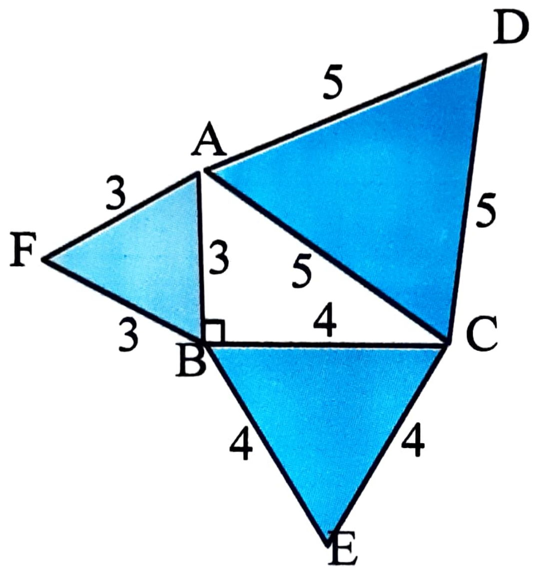
$100 = 36 + 64 = 100$

अतः

यदि (a, b, c) पाइथागोरियन त्रिक हैं तथा k एक धन पूर्णांक है, तो ak, bk और ck भी पाइथागोरियन त्रिक हैं।

पाइथागोरस प्रमेय

क्रियाकलाप



एक समकोण त्रिभुज ABC खींचे जिसकी लम्ब, आधार और कर्ण क्रमशः 3, 4 और 5 सेमी के हैं। समकोण त्रिभुज के कर्ण, लम्ब और आधार पर समान लम्बाई की भुजा वाले समबाहु त्रिभुज बनायें। (चित्र 5.3.1)

समकोण त्रिभुज ABC के कर्ण पर बने समबाहु त्रिभुज ADC का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$= 25. \frac{\sqrt{3}}{4}$ वर्ग सेमी

इसी प्रकार,

समबाहु त्रिभुज AFB और समबाहु त्रिभुज BEC क्रमशः समकोण त्रिभुज ABC के लम्ब और आधार पर बने हैं।

$$\Delta AFB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times(3)^2 = 9\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad ...... \quad (i)$$

$$\Delta BEC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times(4)^2 = 16\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad .... (ii)$$

ΔABC के आधार और लम्ब पर बने समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का योग

$$16\frac{\sqrt{3}}{4} + 9\frac{\sqrt{3}}{4} = 25\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad ...... (iii)$$

सम्बन्ध (i) और (ii) से स्पष्ट है कि

$$\Delta ADC \text{ का क्षेत्रफल} = \Delta AFB \text{ का क्षेत्रफल} + \Delta BEC \text{ का क्षेत्रफल}$$

अतः,

जिस प्रकार किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल आधार और लम्ब पर बने वर्ग के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होता है उसी प्रकार किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके लम्ब और आधार पर बने समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल के योगफलके बराबर होता है।

निष्कर्ष

किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने समबहुभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और लम्ब पर बने समबहुभुजों के क्षेत्रफलों के योगफल के बराबर होता है।

5.4 समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात करना

उदाहरण 1: उस समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए जिसकी अन्य दो भुजाएँ 8 सेमी और 15 सेमी हैं।

हल : मान लीजिए कि समकोण त्रिभुज का कर्ण a सेमी है।

पाइथागोरस प्रमेय से

$a^2 = 8^2 + 15^2$

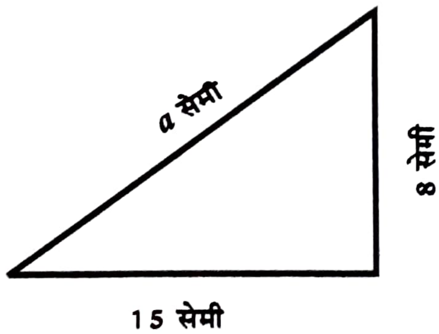
या, $a^2 = 64 + 225$

या, $a^2 = 289$

या, $a^2 = 17^2$

$\therefore a = 17$

$\therefore$ कर्ण की लम्बाई 17 सेमी होगी।



आकृति 5.12

• **समकोण त्रिभुज में कर्ण के अतिरिक्त अन्य दो भुजाओं में से एक भुजा ज्ञात करना :**

उदाहरण 2. आकृति 5.13 में अज्ञात भुजा y की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : पाइथागोरस प्रमेय से

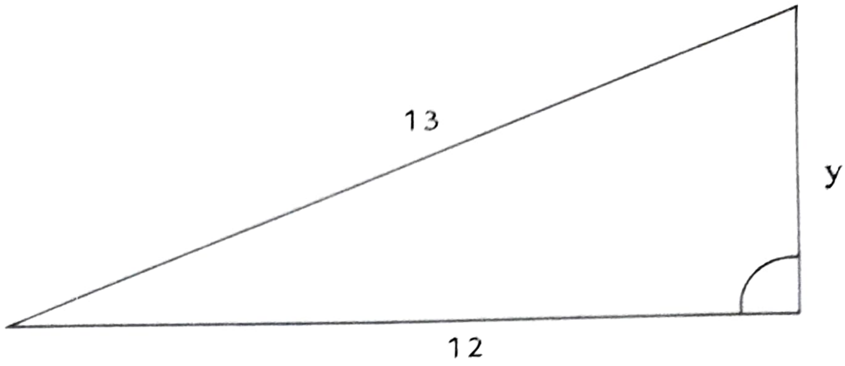
$y^2 + 12^2 = 13^2$

या, $y^2 + 144 = 169$

या, $y^2 = 169 - 144$

या, $y^2 = 25$

या, $y = 5$



आकृति 5.13

अतः अज्ञात भुजा की लम्बाई 5 मात्रक होगी।

उदाहरण 3: 10 मीटर लम्बी सीढ़ी एक दीवार से 8 मीटर दूरी पर लगायी गयी है। इस दीवार पर सीढ़ी कितनी ऊँचाई तक पहुँचेगी ?

हल : मान लीजिए कि सीढ़ी दीवार पर h मी ऊँचाई तक पहुँची।

पाइथागोरस प्रमेय से,

$10^2 = 8^2 + h^2$

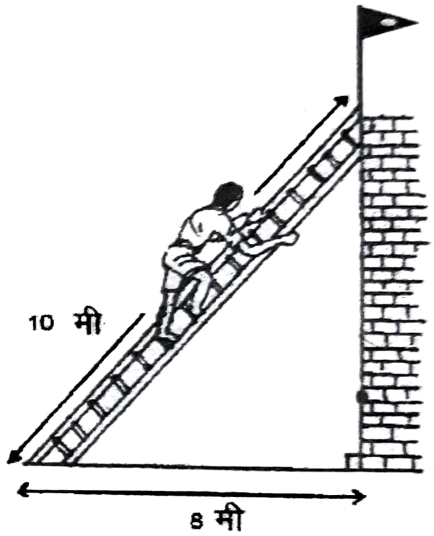
$\therefore h^2 = 10^2 - 8^2$

$= 100 - 64$

$h^2 = 36$

या, $h^2 = 6^2$

या, $h = 6$



आकृति 5.14

अतः सीढ़ी 6 मीटर ऊँचाई तक दीवार पर पहुँचेगी ।

उदाहरण 4: बिजली के खम्भे को सहारा देने वाले तार की लम्बाई आकृति 5.15 की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि तार की लम्बाई x मीटर है।

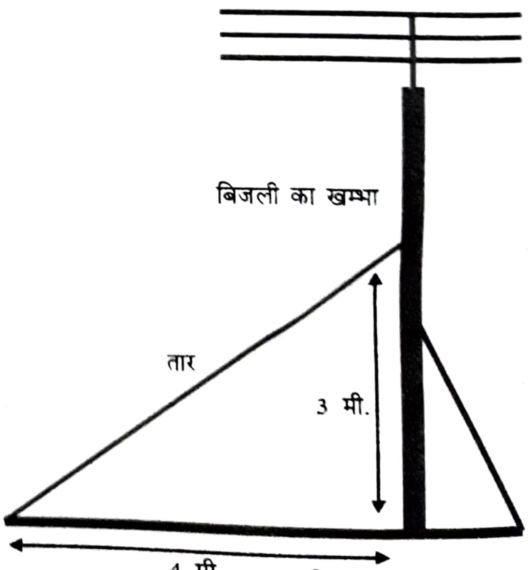
चूँकि चित्र में समकोण त्रिभुज बनेगा।

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$x^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

या, $x^2 = 25$



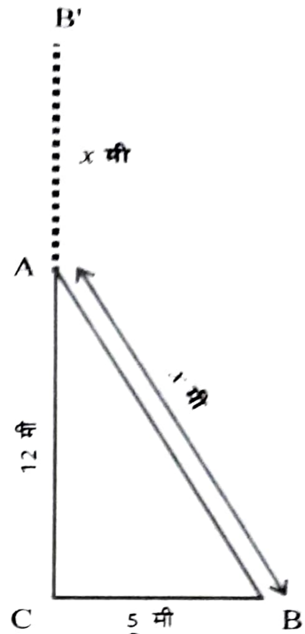
आकृति 5.15

या, $x = 5$

$\therefore$ $x = 5$

अतः तार की लम्बाई 5 मीटर है।

उदाहरण 5 : प्रकाश स्तम्भ एक वृक्ष भूमि से 12 मी की ऊँचाई से टूटा, परन्तु दो टुकड़े अलग नहीं हुए। जिस स्थान पर स्तम्भ की चोटी ने भूमि को छुआ, वह वृक्ष के आधार से 5 मी दूर है। टूटने के पहले स्तम्भ कितना ऊँचा था ?



आकृति 5.16

हल : मान लीजिए कि स्तम्भ का x मी भाग टूटा। टूटने के बाद उसका 12 मी भाग बचा रहा।

उसका ऊपरी सिरा स्तम्भ के पास से 5 मी दूर भूमि से स्पर्श कर रहा है। इसको हम आकृति ABC से प्रदर्शित कर सकते हैं। $\angle C$ समकोण है।

अतः $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

$AB^2 = 169$

$AB^2 = 13^2$

$\therefore AB = 13$

$AB = x = 13$

आकृति का B A भाग ही टूट कर गिरा है और समकोण ΔABC में $AB = x$ के रूप में कर्ण को व्यक्त कर रहा है। अतः टूटने से पहले प्रकाश स्तम्भ की पूरी ऊँचाई = 12 मी + x मी

= 12 मी + 13 मी = 25 मी

प्रयास कीजिए :

1. निम्नलिखित नाप के त्रिभुजों में कौन त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

(i) 5 सेमी, 4 सेमी, 3 सेमी

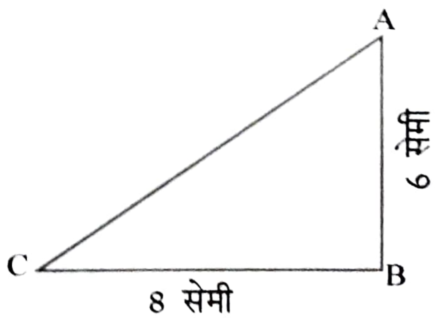
(ii) 6 सेमी, 8 सेमी, 7 सेमी

अभ्यास 5 (*a*)

1. आकृति 5.17 में, $\angle B$ समकोण है, भुजा CA की माप होगी -

(i) 5 सेमी **(ii)** 10 सेमी

(iii) 8 सेमी **(iv)** 6 सेमी

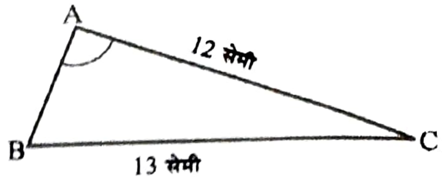


आकृति 5.17

2. आकृति 5.18 में $\angle A$ समकोण हो, तो AB की माप होगी -

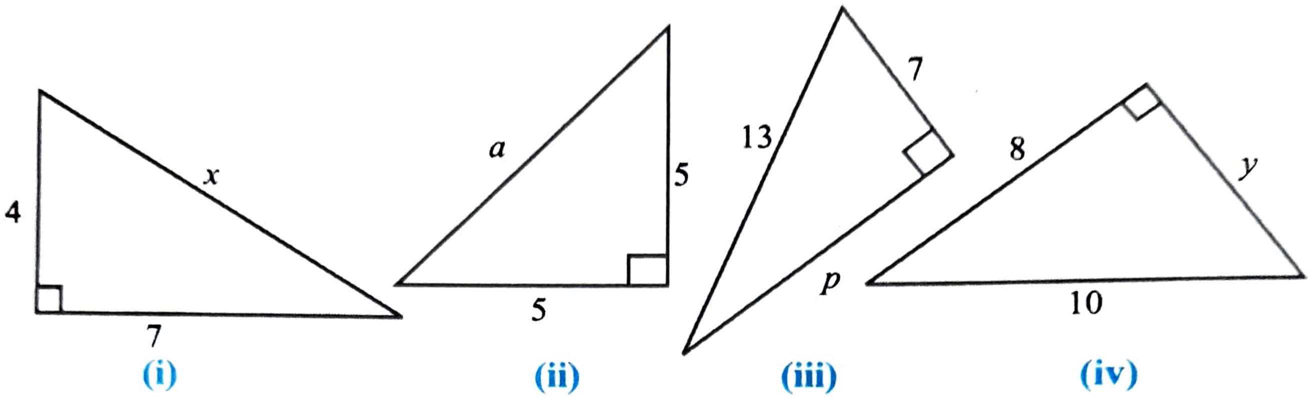
(i) 25 सेमी (ii) 13 सेमी

(iii) 5 सेमी (iv) 12 सेमी



आकृति 5.18

3. निम्नलिखित आकृतियों में समकोण त्रिभुजों को देखकर अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

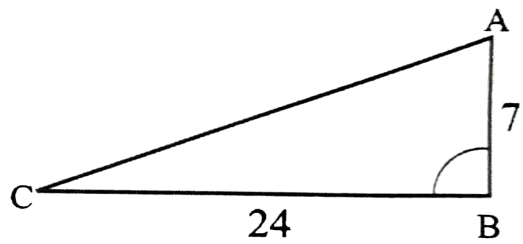


आकृति 5.19

(i) $4^2 + 7^2 = ...$ (ii) $5^2 + ... = a^2$

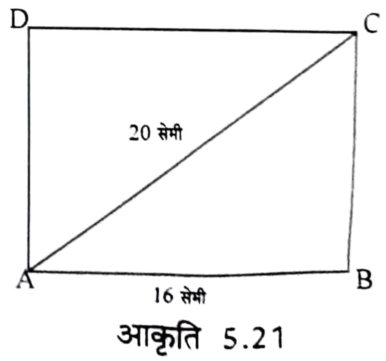
(iii) $13^2 - 7^2 = ...$ (iv) $y^2 = 10^2 - ....$

4. ΔABC में $\angle ABC$ समकोण है। यदि $AB = 7$ सेमी और $BC = 24$ सेमी, तो CA की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.20

5. आयत ABCD में विकर्ण $CA = 20$ सेमी और $AB = 16$ सेमी। BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.21

6. 65 डेसीमी लम्बी सीढ़ी को दीवार से 25 डेसीमी हटाकर लगाया गया है, दीवार के आधार से सीढ़ी के ऊपरी सिरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

7. 26 मीटर लम्बा एक तार है। उसका एक सिरा 24 मीटर ऊँचे खम्भे के ऊपरी सिरे से बंधा है और दूसरा सिरा जमीन में गड़ा है। जमीन पर खम्भे और तार के निचले सिरे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित पाइथागोरियन त्रिक हैं। प्रत्येक से तीन-तीन पाइथागोरियन त्रिक बनाइए :

(i) 3, 4, 5 **(ii)** 5, 12, 13 **(iii)** 8, 15, 17

9. निम्नलिखित में पाइथागोरियन त्रिक छाँट कर लिखिए :

(i) 5, 12, 13 **(ii)** 7, 8, 15 **(iii)** 6, 7, 8

(iv) 8, 15, 17 **(v)** 3, 4, 5

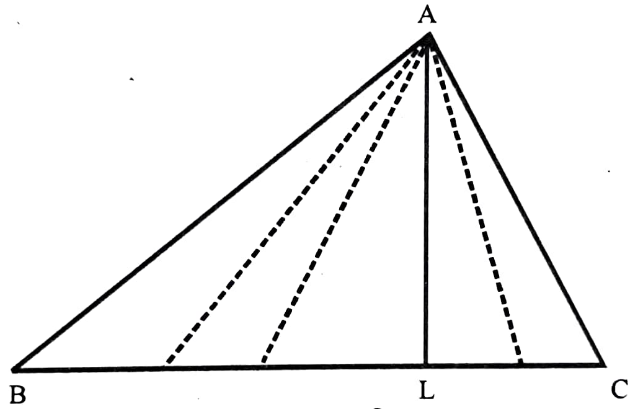
10. सत्यापन कीजिए यदि कोई n विषम संख्या है तो n, $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2+1}{2}$ पाइथागोरियन त्रिक हैं।

5.5 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब (Altitude of Triangle)

त्रिभुज ABC में शीर्ष A से BC तक अनेक रेखाखंड खींचे जा सकते हैं। नीचे दी गई आकृति 5.22 में इन रेखाखंडों को देखिए। ध्यान दीजिए, इनमें से कौन सा रेखाखंड त्रिभुज की ऊँचाई को प्रदर्शित करता है ?

रेखाखंड AL त्रिभुज की ऊँचाई है।

वह रेखा खंड जो शीर्ष A से सीधा उर्ध्वाधर नीचे BC तक और उस पर लम्बवत् होता है, त्रिभुज की ऊँचाई होती है । इसे त्रिभुज का शीर्ष लम्ब भी कहते है।



आकृति 5.22

रेखाखंड AL त्रिभुज का एक शीर्ष लम्ब है । शीर्ष लम्ब का एक अन्त्य बिन्दु, त्रिभुज के शीर्ष पर और दूसरा अन्त्य बिन्दु सम्मुख भुजा पर स्थित होता है। प्रत्येक शीर्ष से केवल एक ही शीर्ष लम्ब खींचा जा सकता है ।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

(i) एक त्रिभुज में कितने शीर्ष हो सकते हैं ?

(ii) क्या आप कोई ऐसा त्रिभुज सोच सकते हैं; जिसके दो शीर्ष लम्ब उसकी दो भुजाएँ ही हों ।

(iii) क्या एक शीर्ष लम्ब पूर्णतया त्रिभुज के अभ्यन्तर में सदैव स्थित होगा?

संकेत : प्रश्न (ii) और (iii) के लिए प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज खींचकर ज्ञात कीजिए ।

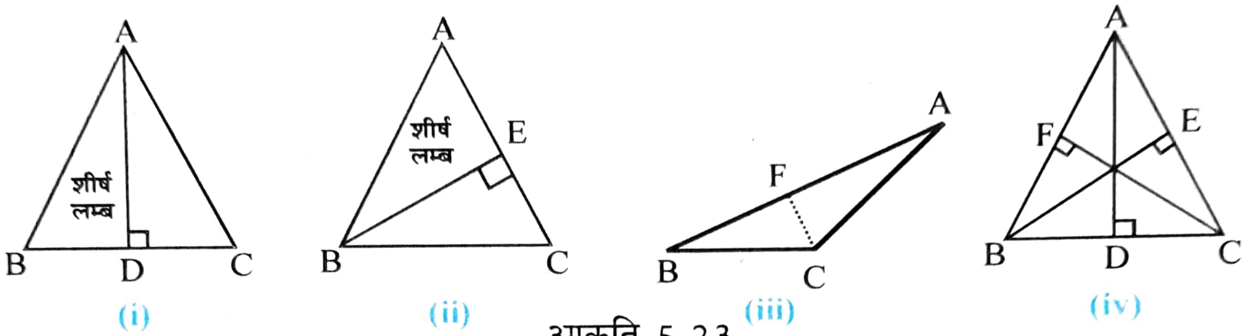
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. ΔPQR में कोण P एक समकोण है। इसकी सबसे लम्बी भुजा कौन-सी है ।
2. किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लम्बी भुजा कौन-सी होती है ।

इन्हें देखिए :

निम्नलिखित आकृति 5.23 में (i), (ii) और (iii) को देखिए।

चित्र (i) में ΔABC के शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AD, चित्र (ii) में ΔABC के शीर्ष B से भुजा AC पर लम्ब BE और चित्र (iii) में ΔABC के शीर्ष C से भुजा AB पर लम्ब CF खींचा गया है।



आकृति 5.23

रेखाखंड AD, BE और CF, ΔABC के शीर्ष लम्ब हैं।

आकृति 5.23 (iv) में, त्रिभुज ABC के कितने शीर्षलम्ब हैं ? हमने देखा **त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब हैं, जो एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।**

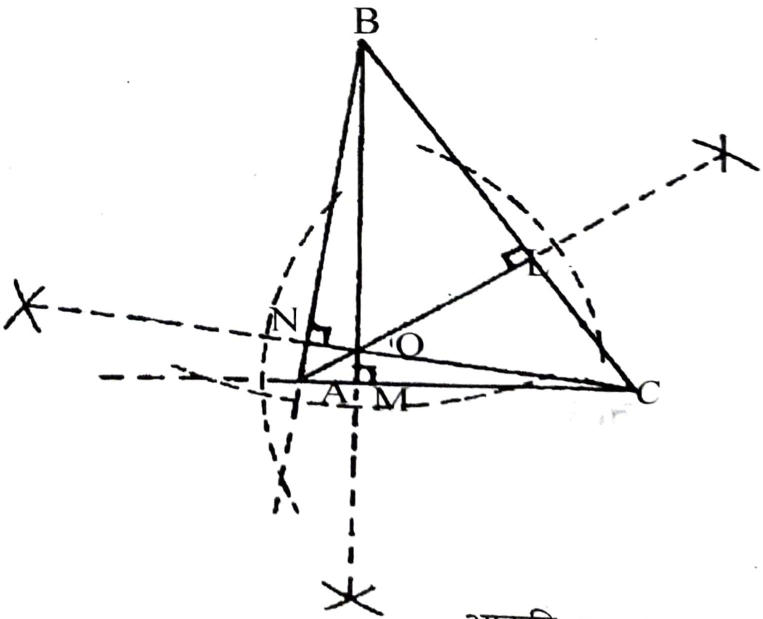
> **किसी त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गये लम्ब रेखाखंड को त्रिभुज का शीर्षलम्ब (Altitude) कहते हैं। त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब होते हैं।**

प्रयोग 1: एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसकी भुजाएँ, 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। इस त्रिभुज के शीर्ष A, B और C से शीर्षलम्ब खींचिए।

रचना के चरण निम्नलिखित हैं-

1. दी हुई भुजाओं की माप से ΔABC बनाइए।
2. शीर्ष A से $AL \perp BC$ खींचिए।
3. शीर्ष B से $BM \perp AC$ खींचिए।
4. शीर्ष C से $CN \perp AB$ खींचिए।

क्या तीनों शीर्षलम्ब एक ही बिन्दु O से होकर जा रहे हैं ?



आकृति 5.24

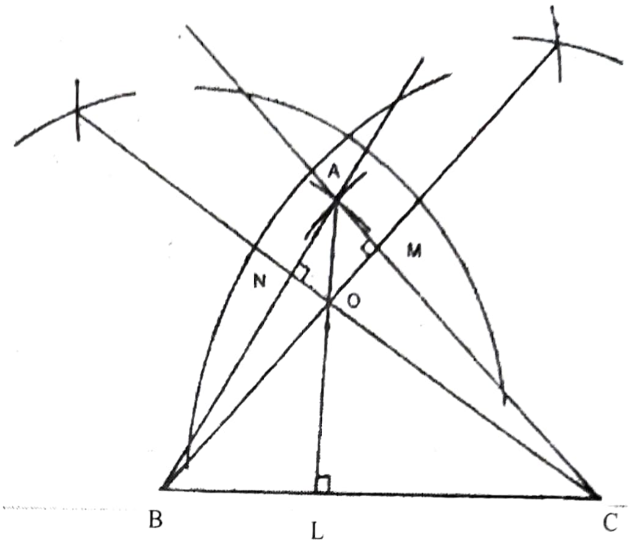
हम देखते हैं कि ΔABC के तीनों शीर्षलम्ब AL, BM और CN एक ही बिन्दु O से होकर जा रहे हैं।

प्रयोग 2: एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी भुजाएँ 7 सेमी, 6 सेमी और 5 सेमी हैं। इस त्रिभुज के शीर्ष B और C से शीर्षलम्ब खींचिए।

रचना के चरण निम्नलिखित हैं।

1. दी हुई भुजाओं के अनुसार ΔABC खींचिए।
2. B से AC पर लम्ब BM खींचिए।
3. C से AB पर लम्ब CN खींचिए।
4. जिस बिन्दु पर दोनों लम्ब BM और CN प्रतिच्छेदित करें उसे बिन्दु O से प्रदर्शित कीजिए।
5. A को O से मिलाइए और आगे बढ़ाइए जो BC को बिन्दु L पर काटे।

   $\angle ALB$ नापिए। हम देखते हैं कि $\angle ALB = 90^0$; अतः $AL \perp BC$ है जो तीसरा शीर्षलम्ब है।



आकृति 5.25

हमने यह भी देखा कि पहले दो शीर्षलम्बों का प्रतिच्छेदन बिन्दु O है।

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि

एक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं। त्रिभुज के शीर्षलम्बों (तीनों) के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्बकेन्द्र (Orthocentre) कहते हैं।

प्रयास कीजिए

अब एक त्रिभुज खींचिए। इसके दो शीर्षलम्ब खींचिए। इनके प्रतिच्छेदित बिन्दु O को तीसरे शीर्ष से मिलाकर इतना आगे बढ़ाइए कि यह तीसरी भुजा को काटे। इसके द्वारा बने कोण को नापिए। हम देखते हैं कि यह कोण 90^0 है। अतः तीनों शीर्षलम्ब बिन्दु O से जाते हैं।

विशेष : त्रिभुज का लम्बकेन्द्र निकालने के लिए दो शीर्षलम्ब खींचना ही पर्याप्त है, क्योंकि तीसरा शीर्षलम्ब भी इसी प्रतिच्छेद बिन्दु (लम्बकेन्द्र) से होकर जाता है।

अभ्यास 5 (*b*)

1. नीचे दी गई भुजाओं और कोणों से त्रिभुज खींचकर उनके शीर्षलम्ब खींचिए तथा जाँच कीजिए कि प्रत्येक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी हैं।

(i) 3.4 सेमी, 5.4 समी, 4.5 सेमी;

(ii) दो भुजाएँ 6 सेमी और 4.5 सेमी तथा इनके बीच का कोण 120^0;

(iii) दो भुजाएँ 5 सेमी और 4 सेमी तथा इनके बीच का कोण 90^0;

(iv) दो कोण 65^0 तथा 80^0 और बीच की भुजा 5 सेमी।

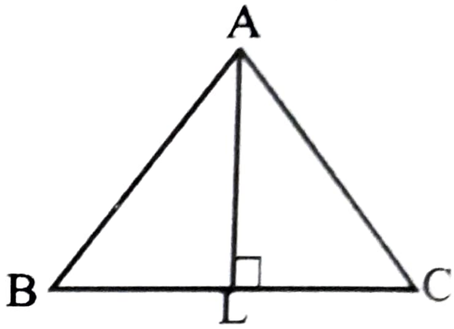
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = AC, शीर्ष A से शीर्षलम्ब AL खींचिए। मापकर बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या नहीं।

(i) BL = LC

(ii) $\angle B = \angle C$

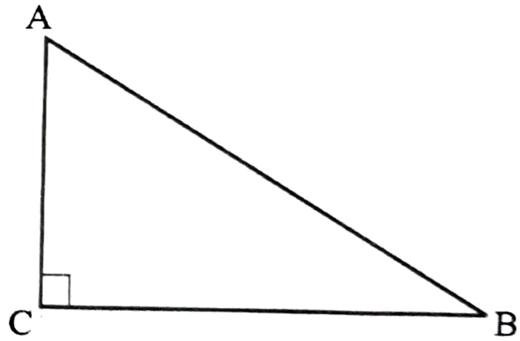
(iii) $\angle BAL = \angle CAL$

(iv) शीर्षलम्ब AL ने समद्विबाहु ΔABC को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँट दिया है।



आकृति 5.26

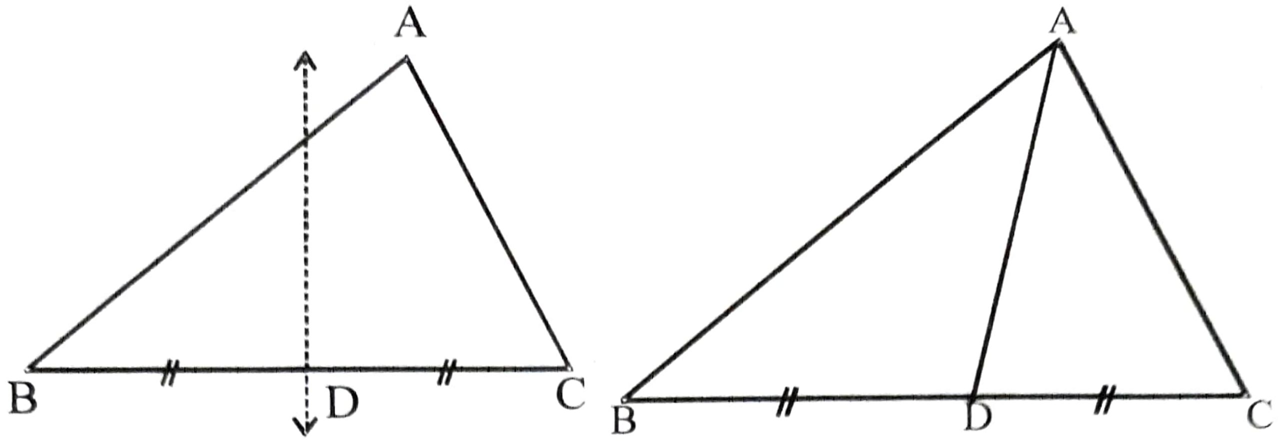
3. ΔABC में $\angle C$ समकोण है। इस त्रिभुज का बिना शीर्षलम्ब खींचे लम्बकेन्द्र बताइए।



आकृति 5.27

5.5.1 त्रिभुज की माध्यिकाएँ (Meadian of Triangle):

क्रियाकलाप : कागज के टुकड़े से एक त्रिभुज ABC काटिए । इसकी कोई एक भुजा जैसे आकृति 5.28 में भुजा BC लीजिए। त्रिभुज के बिन्दु B और C बिन्दु को मिलाकर कागज मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा BC का लम्ब समद्विभाजक ज्ञात कीजिए । कागज पर मोड़ की तह, भुजा BC को D पर काटती है, जो उसका मध्य बिन्दु है । शीर्ष A को D से मिलाइए।



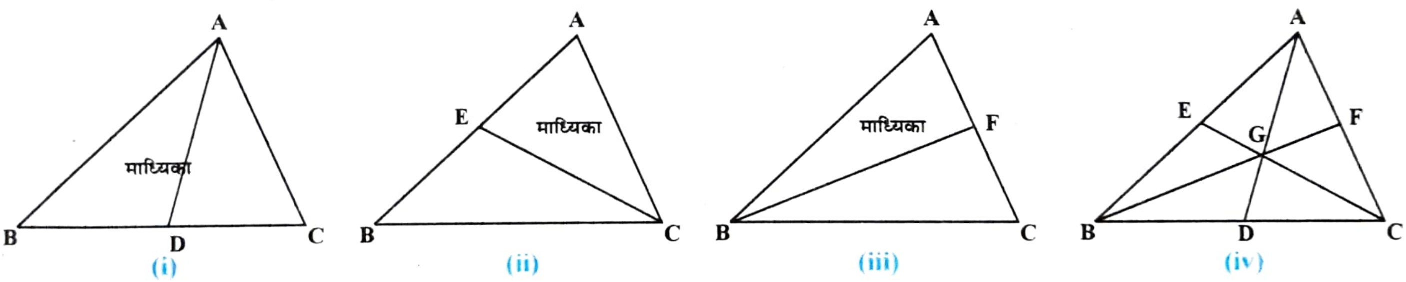
आकृति 5.28

रेखाखंड AD जो BC के मध्य बिन्दु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाता है, त्रिभुज की एक माध्यिका है। भुजा AB तथा CA लेकर, इस त्रिभुज की दो और माध्यिकाएं खींचिए ।

माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाती है ।

इसे देखिए :

निम्नलिखित आकृति 5.29 को देखिए। चित्र (i) में त्रिभुज के शीर्ष A को उसकी सम्मुख भुजा BC के मध्य बिन्दु D से मिलाया गया है। चित्र (ii) में शीर्ष C को सम्मुख भुजा AB के मध्य बिन्दु E से मिलाया गया है। चित्र (iii) में शीर्ष B को सम्मुख भुजा AC के मध्य बिन्दु F से मिलाया गया है। रेखाखंड AD, CE और BF त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ कहलाती है। चित्र (iv) में त्रिभुज ABC की कितनी माध्यिकाएँ हैं ? हम देखते हैं कि **त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ हैं, जो एक बिन्दुगामी होती हैं।**



आकृति 5.29

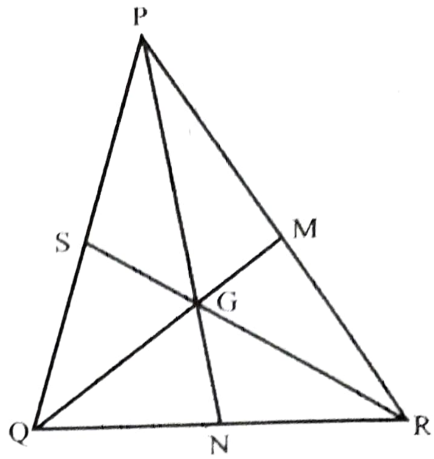
अतः

त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से जोड़ने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका (Median) कहते हैं।

प्रयोग 1 : एक ΔPQR खींचिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी हों। PQ, QR और RP के मध्य बिन्दुओं क्रमशः S, N, M को उनके सम्मुख शीर्षों से मिलाइए। बताइए रेखाखंड PN, RS और QM,

ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं अथवा नहीं ?

क्या तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से होकर जा रही हैं ?

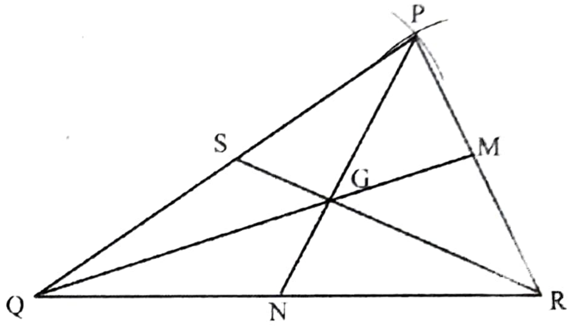


आकृति 5.30

निष्कर्ष

माध्यिकाएं 2 : 1 के रूप में विभाजित होती है

प्रयोग 2: एक ΔPQR खींचिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। PR के मध्य बिन्दु M को शीर्ष Q से मिलाइए।



आकृति 5.31

PQ के मध्य बिन्दु S को R से मिलाइए। QM और RS त्रिभुज की तीन माध्यिकाओं में से दो माध्यिकाएँ हैं। जिस बिन्दु पर QM और RS मिलती हैं, उस बिन्दु पर G अंकित कीजिए।

P, G मिलाकर बढ़ाइए। मान लीजिए कि यह QR को बिन्दु N पर मिलती है। QN और NR को मापिए। क्या QN=NR है ?

हम देखते हैं कि QN = NR

अतः N भुजा QR का मध्य बिन्दु हुआ और इस प्रकार PN त्रिभुज की तीसरी माध्यिका हुई और तीनों माध्यिकाएँ एक बिन्दु G से होकर जा रही हैं। अब एक ∠PQR बनाइए। इसकी दो माध्यिकाएँ खींचकर उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु को G से नामांकित कीजिए। तीसरे शीर्ष को इस बिन्दु से मिलाकर आगे बढ़ाइए और देखिए कि यह रेखा माध्यिका है या नहीं। हम देखते हैं कि यह भी माध्यिका है।

अतः

त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी (*Concurrent*) होती हैं। वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ मिलती हैं, माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु या त्रिभुज का केन्द्रक (*Centroid*) या गुरूत्व केन्द्र कहलाता है।

विशेष : किसी त्रिभुज का केन्द्रक निर्धारित करने के लिए उसकी दो माध्यिकाएँ खींचना ही पर्याप्त है। उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक होता है।

अभ्यास 5 (c)

1. निम्नलिखित कथनों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :
   (i) त्रिभुज की माध्यिका वह रेखा खंड है जो इसके किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के .... से मिलाती है।
   (ii) किसी त्रिभुज की माध्यिकाएँ .... होती हैं।
   (iii) त्रिभुज की माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर मिलती हैं उसे ...... कहते हैं।

2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = AC। माध्यिका AD खींचिए। नापकर बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या नहीं।
   (i) AD, BC पर लम्ब है।
   (ii) AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।
   (iii) AD, BC का लम्ब समद्विभाजक है।

3. AD, BE और CF किसी ΔABC की माध्यिकाएँ हैं और G इसका केन्द्रक है। यदि BE = CF, तो ΔGBC किस प्रकार का त्रिभुज है ? आकृति बनाकर देखिए।
   (i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) समबाहु

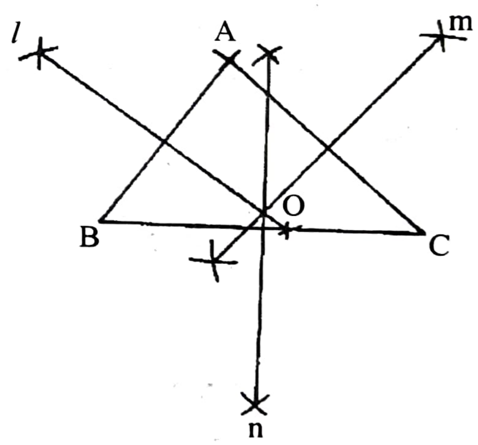
त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक :

इन्हें कीजिए :

प्रयोग 1: एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी की हों। भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक भी खींचिए।

रचना : (i) दिए गये नाप से त्रिभुज ABC बनाइए।
(ii) AB को लम्बार्धक (लम्ब समद्विभाजक) l खींचिए।
(iii) AC को लम्बार्धक m खींचिए।
(iv) BC का लम्बार्धक n खींचिए।

क्या तीनों लम्बार्धक उपर्युक्त चित्र की भाँति बिन्दु O से जा रहे हैं ?



आकृति 5.32

प्रयोग 2: एक ΔABC खींचिए। जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी की हों। भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक भी खींचिए।

रचना : **(i)** दी गयी मापों से त्रिभुज ABC बनाइए।

(ii) भुजा AB का लम्बार्धक l खींचिए।

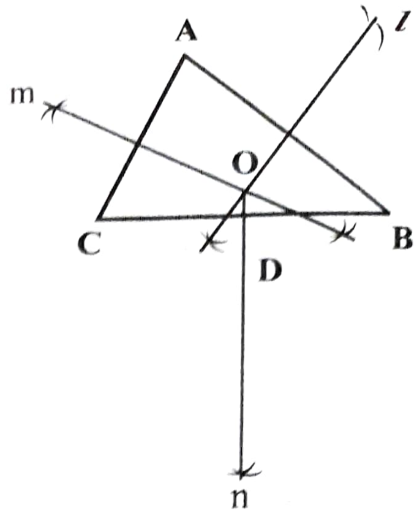
(iii) भुजा AC का लम्बार्धक m खींचिए।

(iv) लम्बार्धक l और m जिस बिन्दु पर काटें उसे O से नामांकित कीजिए।

(v) O से $n \perp$ BC खींचिए जो BC को D पर काटें।

(vi) BD और CD नाप कर देखिए कि क्या BD = CD है ? हम देखते हैं कि BD = CD है। अतः n, BC का लम्बार्धक है।

इस प्रकार बिन्दु O त्रिभुज ABC की तीनों भुजाओं के लम्बार्धकों का सार्वबिन्दु है।



अब एक त्रिभुज ABC बनाइए। भुजा AB और AC के लम्बार्धक खींचिए। दोनों लम्बार्धक जिस बिन्दु पर काटें उस पर O अंकित कीजिए। बिन्दु O से BC पर लम्ब खींचिए और जाँच कीजिए कि यह BC का लम्बार्धक है या नहीं ?

हमने देखा यह भी लम्बार्धक है और बिन्दु O से जा रहा है, अर्थात **तीनों लम्बार्धक संगामी हैं**।

अतः

> **त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते हैं। त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circum centre) कहते हैं।**

विशेष : किसी त्रिभुज का परिकेन्द्र निकालने के लिए उसकी दो भुजाओं के लम्बार्धक (लम्ब समद्विभाजक) खींच लेना ही पर्याप्त होता है।

अभ्यास 5 (*d*)

1. एक रेखाखंड AB लेकर उसकी लम्ब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। l पर कोई बिन्दु P लेकर PA और PB को नापिए। क्या PA और PB बराबर हैं ?

2. एक समकोण त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $\angle C$ समकोण हो। AB का मध्य बिन्दु O ज्ञात कीजिए। केन्द्र O और त्रिज्या OA वाला एक वृत्त खींचिए। क्या यह C से होकर जाता है ? ΔABC के संदर्भ में, बिन्दु O को क्या कहते हैं ?

3. नीचे दी गई भुजाओं और कोणों से त्रिभुज बनाइए और उनकी भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचिए और जाँच कीजिए कि वे संगामी हैं ।

(i) 7 सेमी, 5 सेमी और 4 सेमी

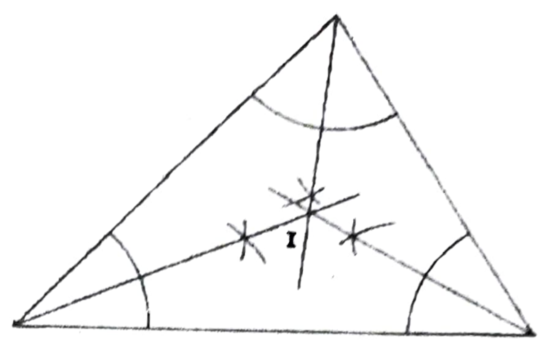
(ii) 6 सेमी तथा भुजा पर बने कोण 90^0 और 30^0

(iii) 4.5 सेमी, 2.5 सेमी, बीच कोण 105^0

5.5.2 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक

प्रयोग 1. एक त्रिभुज ABC खींचिए। जिसकी भुजाएं 6 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी हो। इस त्रिभुज के कोणों A, B और C के समद्विभाजक खींचिए।

रचना : दिये गये माप से त्रिभुज ABC खींचिए। $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक खींचिए। क्या तीनों समद्विभाजक एक बिन्दुगामी हैं ?

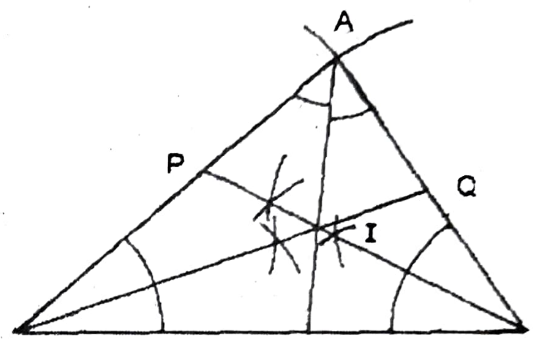


आकृति 5.34

प्रयोग 2. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। इस त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक खींचिए।

दोनों समद्विभाजक एक दूसरे को जिस बिन्दु पर काटें उसे I से नामांकित कीजिए।

चित्रानुसार A और I को मिलाकर बढ़ाइए। मान लीजिए कि यह BC से बिन्दु R पर मिलता है। $\angle BAR$ और $\angle CAR$ को मापिए।
हमने देखा कि $\angle BAR = \angle CAR$ है। अतः AR, $\angle A$ की समद्विभाजक है।
इस प्रकार तीसरे कोण का समद्विभाजक भी बिन्दु I से होकर जाता है।



आकृति 5.35

अब एक त्रिभुज ABC बनाइए। $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक खींचिए। समद्विभाजक जिस बिन्दु पर काटें उसे I से नामांकित कीजिए। बिन्दु I को बिन्दु A से मिलाइए और जाँच कीजिए कि AI, $\angle A$ का समद्विभाजक है या नहीं।

हम देखते हैं कि AI कोण A की समद्विभाजक है और तीनों समद्विभाजक एक ही बिन्दु I से जा रहे हैं।

अतः

त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्तः केन्द्र (Incentre) कहते हैं।

विशेष : किसी त्रिभुज का अन्तःकेन्द्र निर्धारित करने के लिए उसके दो कोणों के अर्धक खींच लेना ही पर्याप्त होता है। उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु ही अन्तःकेन्द्र होता है।

अभ्यास 5 (*e*)

1. नीचे दी गई भुजाओं तथा कोणों से त्रिभुज बनाइए और उनके कोणों के समद्विभाजक खींचकर जाँच कीजिए कि क्या वे संगामी हैं।

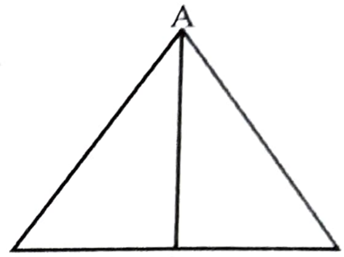
(I) 3.4 सेमी, 4 सेमी तथा 2.5 सेमी

(II) 4.6 सेमी, 3.5 सेमी तथा बीच का कोण 120^0

(III) 5 सेमी, 4 सेमी तथा 2.5 सेमी।

2. एक समबाहु ΔABC खींचिए और उसका अन्तः केन्द्र ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि इसके परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र व केन्द्रक इसके अन्तः केन्द्र पर संपाती हैं।

3. पार्श्व चित्र में ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज हैं, इसमें $AB = AC$ है, AP, $\angle A$ का अर्धक है। यह रेखाखंड AP, BC का लम्बार्धक है या नहीं। चित्र खींच कर और नापकर बताइए।



आकृति 5.36

5.6 त्रिभुजों में समरूपता की अवधारणा :

आप जानते हैं कि दो सर्वांगसम आकृतियों में समान आकृति (Shape) और समान माप (Size) की होती है, प्रकृति में कुछ ऐसी आकृतियों के उदाहरण भी मिलते हैं जो कि आकृति में समान रूप के तो होते हैं, किन्तु 'समान माप' के नहीं होते। ध्यान दीजिए :- किसी फूल के पौधे में सभी फूल समान रूप के होते हुए भी समान आकार के नहीं होते हैं। ऐसी आकृतियों को समरूप (Similar) आकृतियाँ कहते हैं।

आप यह भी देख सकते हैं कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम हों।

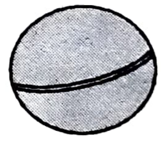
समरूपता की अवधारणा :

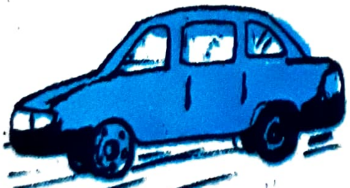
इन चित्रों को देखिए :

(i)

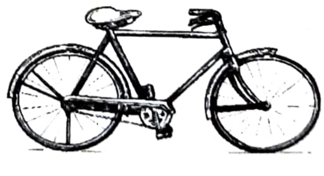
(ii)

(iii)


(iv)


(v)

(vi)


(vii)

(viii)

उपर्युक्त चित्र (i) और (ii) में हम देखते हैं कि दोनों चित्र बच्चे के हैं, परन्तु दोनों के आकार भिन्न हैं। चित्र (iii) और (iv) को देखने से भी स्पष्ट है कि दोनों चित्र एक ही बॉल के हैं, परन्तु इन चित्रों के आकार भिन्न हैं। चित्र (v) और (vi) को देखिए, इनमें भी एक ही कार के दो चित्र है जिनके आकार भिन्न है इसी प्रकार चित्र

(vii) और (viii) में दो साइकिलें दिखाई दे रही है इनमें भी दोनों साइकिलों के आकार भिन्न हैं, परन्तु आकृति समान है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपर्युक्त चित्रों के जोड़े, रूप में समान हैं परन्तु आकार में भिन्न हैं।

ऐसी आकृतियों को जो रूप में समान हों, परन्तु उनके आकार भिन्न हों, समरूप आकृतियाँ कहते हैं।

निम्न को भी देखकर बताइए कि उनमें क्या सम्बन्ध है?

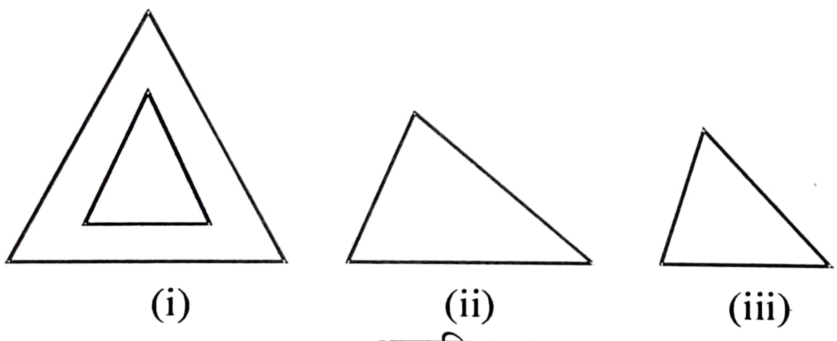
1. अपने घर में छोटे भाई की दो भिन्न आकार की फोटो को।
2. किसी हॉकी के दो भिन्न आकार के चित्रों को।
3. किसी ग्लोब के दो भिन्न आकार के चित्रों को।
4. किसी पेड़ के दो भिन्न आकार के चित्रों को।

हम देखते हैं कि छोटे भाई की फोटो; हॉकी के चित्र; ग्लोब के चित्र तथा पेड़ के चित्र की आकृतियाँ एक सी हैं परन्तु आकार भिन्न हैं।

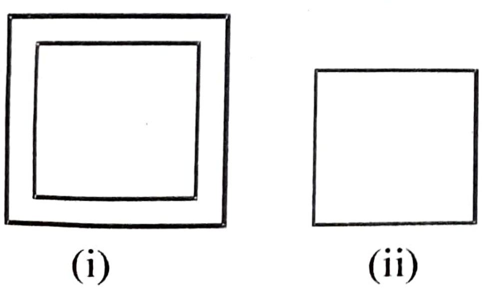
अब आप एक ही आकृति की पत्तियों और फूलों को एकत्र कीजिए। ऐसी भी पत्तियों और फूलों को एकत्र कीजिए, जिनकी आकृतियाँ समान हैं परन्तु आकार भिन्न हैं ।

इन्हें भी देखिए :

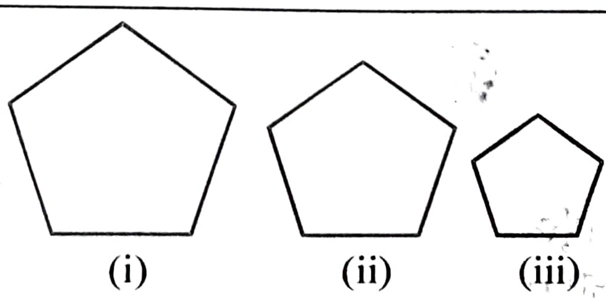
निम्नलिखित आकृतियों को देखिए इनमें 5.41 में विभिन्न मापों के चार समबाहु त्रिभुज, 5.42 में तीन भिन्न-भिन्न माप के तीन वर्ग और 5.43 में विभिन्न मापों के तीन समपंचभुज है । क्या इनके आकार समान हैं ? क्या ये समरूप है? उपर्युक्त सभी प्रश्नों का उत्तर स्पष्ट रूप से 'हाँ' है । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि "सभी समान संख्या की भुजाओं के समभुज जैसे समबाहु त्रिभुज, वर्ग आदि समरूप होते हैं ।



आकृति 5.41



आकृति 5.42



आकृति 5.43

5.7 समरूप बहुभुज :

फोटोग्राफर की दुकान में आप ने किसी व्यक्ति के अथवा एक ही वस्तु के या एक ही आकृति के फोटो चित्रों को विभिन्न मापों में एक ही निगेटिव से बने देखा होगा । फोटोग्राफर वह बहुधा छोटे साइज के फिल्म जिसको 35 मिमी माप की फोटो खींचता है। फिर उसको 45 मिमी या 55 मिमी के फिल्म पर आकार / माप बड़ा कर देता है ।

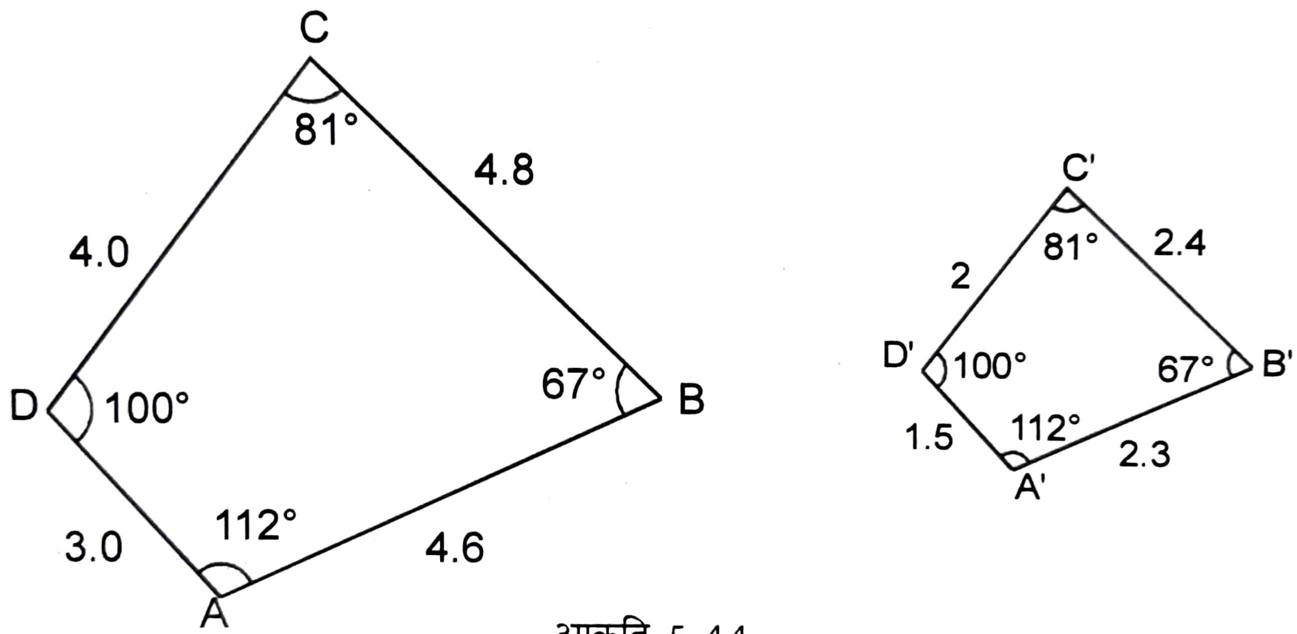
यदि हम बड़े और छोटे फोटो चित्रों की संगत भुजाओं में अनुपात निकालें तो $\frac{45}{35}$ या $\frac{55}{35}$ होगा । वास्तव में इसका अर्थ है कि छोटे चित्र के प्रत्येक भुजा को फोटोग्राफर समान अनुपात, अर्थात 35:45 या 35:55 में बढ़ा देता है ।

पुनः दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है समरूप होते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों, और

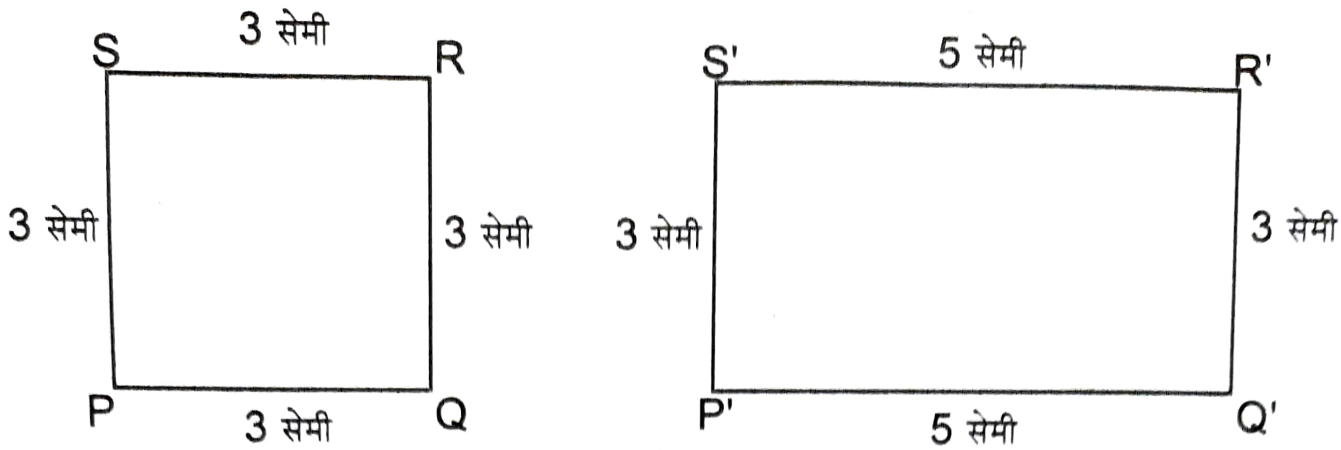
(ii) उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों ।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि निम्नांकित चतुर्भुज ABCD और A'B'C'D' समरूप हैं।



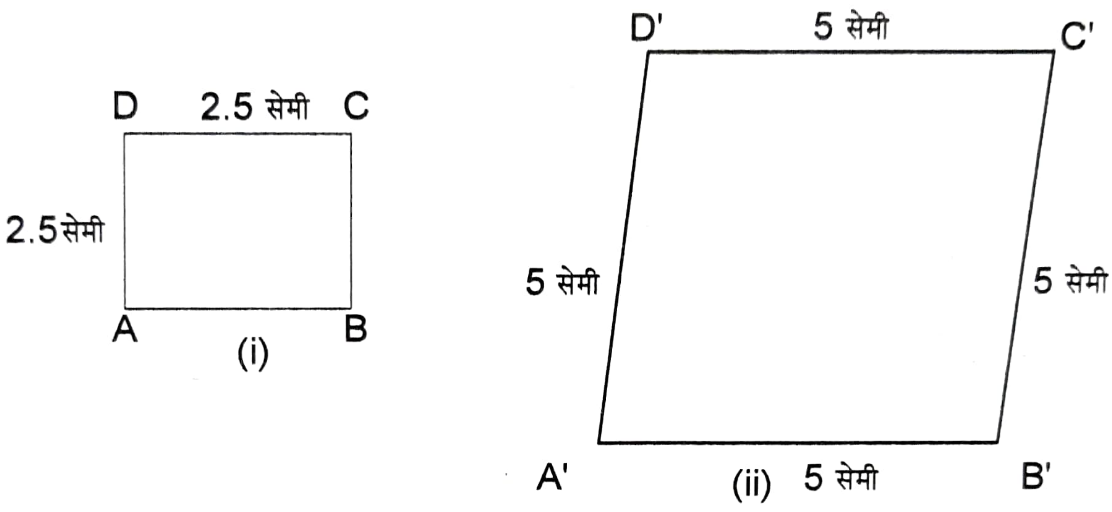
आकृति 5.44

अब निम्नलिखित, दो आकृतियाँ जो कि एक वर्ग और दूसरी आयत है पर ध्यान दीजिए। इनके संगत कोण बराबर हैं। परन्तु उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में नहीं है। अतः दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



आकृति 5.45

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि वर्ग और समचतुर्भुज की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं परन्तु उनके संगत कोण बराबर नहीं है। अतः दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



आकृति 5.46

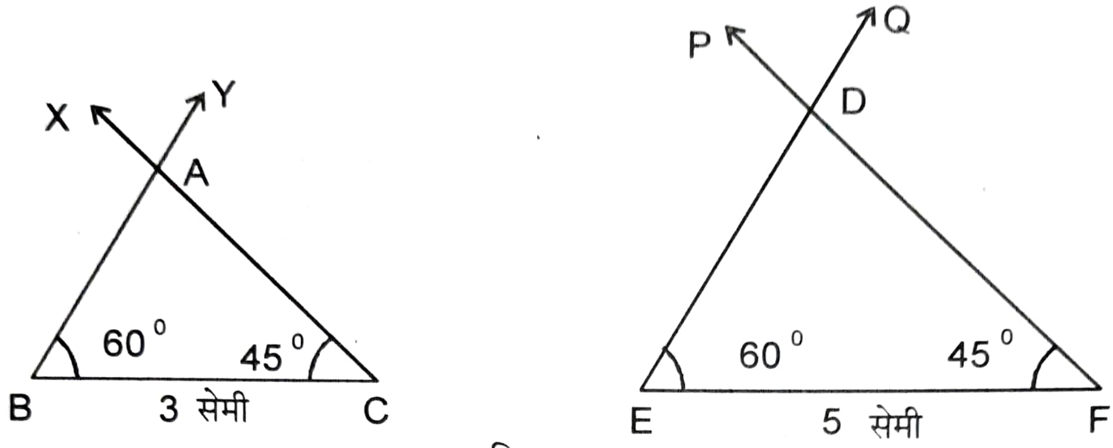
अतः उपर्युक्त आकृति 5.46 (i) और आकृति 5.46 (ii) में से केवल एक प्रतिबन्ध किसी बहुभुज के समरूप होने के लिए पर्याप्त नहीं है।

यूनानी गणितज्ञ थेल्स (600 ई.पू) ने समान कोणिक त्रिभुजों के सम्बन्ध में एक महत्वपूर्ण प्रमेय उद्घाटित किया था।

समान कोणिक त्रिभुजों की किन्हीं दो संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान होता है। चाहे उनके माप कुछ भी हों।

स्मरण कीजिए कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए त्रिभुजों के अवयवों के केवल तीन युग्म लिए थे। इसी प्रकार प्रयास करते हैं कि दो त्रिभुजों की समरूपता स्थापित करने के लिए त्रिभुजों के कुछ कम अवयवों की ही आवश्यकता हो। आइए इसके लिए कुछ क्रिया कलाप करें।

क्रिया कलाप - दो रेखाखंड BC और EF क्रमश 3 सेमी और 5 सेमी को खींचिए। बिन्दु B और E पर 60^0 के कोण YBC और QEF की रचना कीजिए तथा बिन्दु C और F पर 45^0 के कोण XCB और PFE की रचना कीजिए। भुजाएँ BY और CX एक दूसरे को बिन्दु A पर काटती हैं। तथा भुजाएँ QE और PF, D पर प्रतिच्छेद करती हैं।



आकृति 5.47

इस प्रकार हमें दो त्रिभुज ABC और DEF प्राप्त होते हैं।

स्पष्टतः कोण $\angle A$ और $\angle D$ 75^0 के हैं। ध्यान दीजिए, त्रिभुजों ABC और DEF में $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ मिलता है जो कि संगत कोण हैं। अतः संगत कोण बराबर हैं। अब दोनों त्रिभुजों की भुजाओं AB, AC, DE, DF की माप ज्ञात करके, अनुपात $\frac{AB}{DE}, \frac{AC}{DF}$ तथा $\frac{BC}{EF}$ ज्ञात कीजिए

उपर्यक्त चित्रों में $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = .6$ के हैं।

अर्थात संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं। इसीलिए त्रिभुज ABC तथा DEF समरूप हैं।

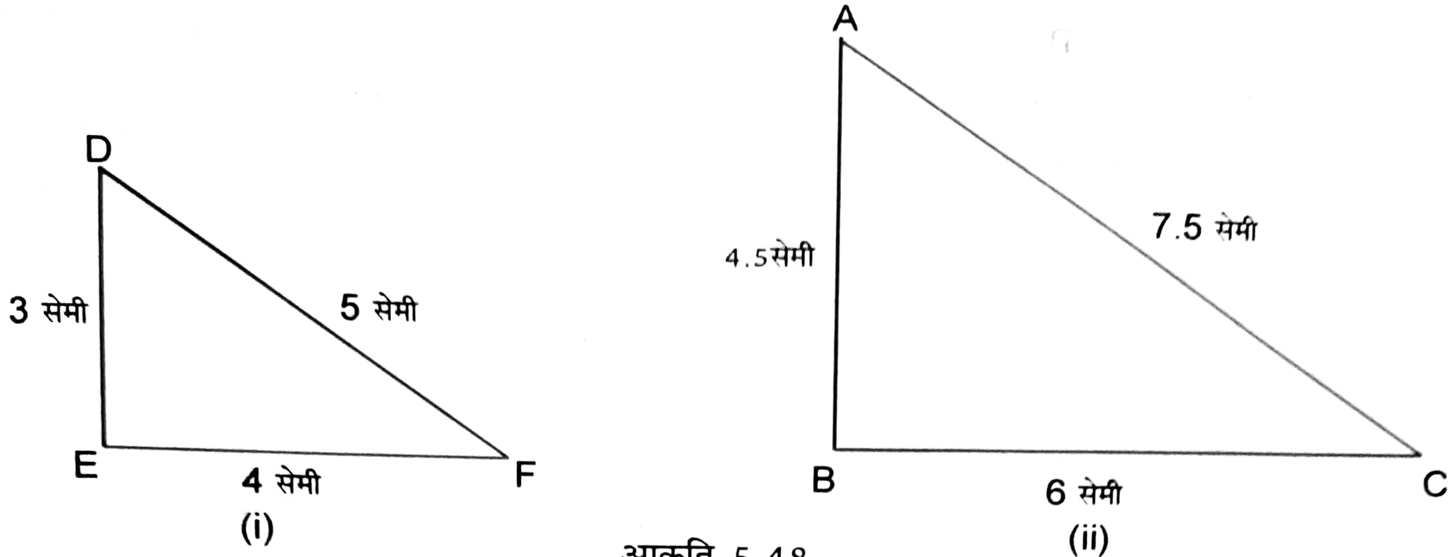
इन्हें कीजिए

इस क्रिया कलाप को अनेक त्रिभुजों जिनके संगत कोण बराबर हों, के युग्म बनाकर कीजिए। प्रत्येक बार निम्न निष्कर्ष प्राप्त होगा।

यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ अनुपातिक होती हैं और इस प्रकार दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

क्रिया कलाप 1 : दो समरूप त्रिभुज बनाने का प्रयास कीजिए इसके लिए आकृति 5.48(i) और (*ii*) को देखिए और अपनी अभ्यास पुस्तिका पर माप के अनुसार दोनों त्रिभुजों को खींचिए। इनकी संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि

$$\frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2},$$



आकृति 5.48

$$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ तथा}$$

$$\frac{CA}{FD} = \frac{7.5}{5} = \frac{3}{2}$$

दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं के अनुपात समान हैं। अब इनके कोणों को मापिए।

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle F$

यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं।

क्रिया कलाप 2 : इसे भी कीजिए :

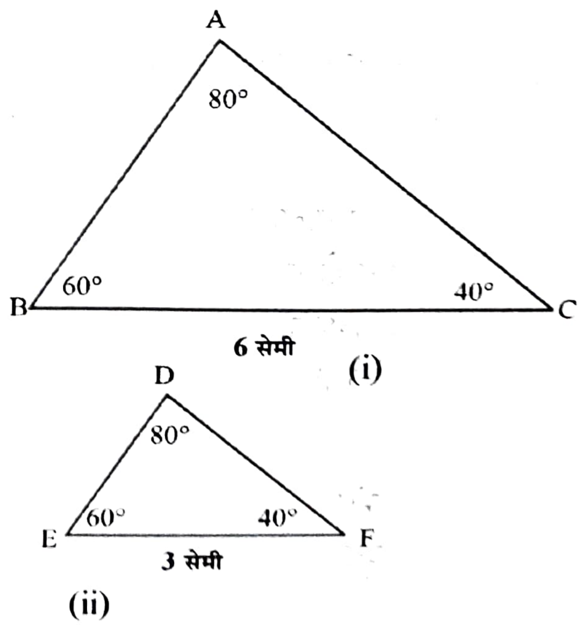
अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दो त्रिभुज खींचिए जिनकी माप आकृति 5.49 (i) और (ii) के अनुसार हों। अब दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं AB और DE, BC और EF तथा CA और FD को नापिए और इनका अनुपात ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि

$$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{BC}{EF}$$

अर्थात्



आकृति 5.49

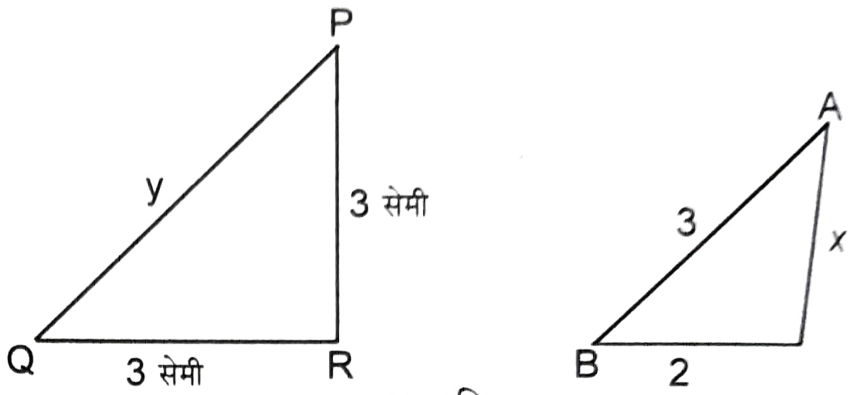
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{1}$$

अर्थात् दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं के अनुपात समान हैं, चित्र से स्पष्ट है कि इनके संगत कोण समान हैं। अतः

यदि दो त्रिभुजों के कोण समान हों तो उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं।

अभ्यास 5 (*f*)

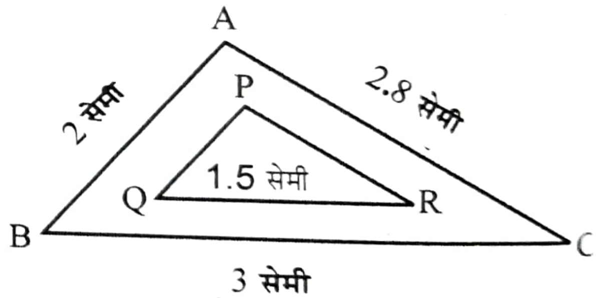
1. आकृति 5.50 में दो त्रिभुज ABC और PQR समरूप हैं। इनकी भुजाओं की लम्बाइयाँ सेमी में अंकित हैं। x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.50

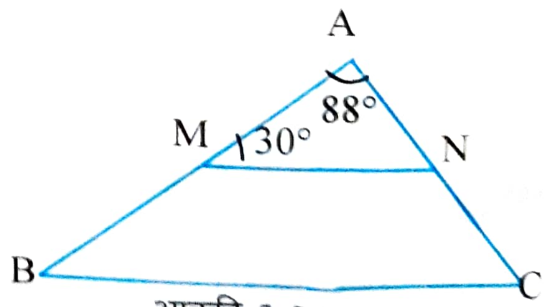
2. यदि किसी त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR में उनकी भुजाएँ क्रमशः AB = 3 सेमी, BC = 5 सेमी, CA = 4 सेमी तथा PQ = 7 सेमी, PR = 6 सेमी, QR = 8 सेमी हैं, तो त्रिभुज समरूप हैं या नहीं ?

3. आकृति 5.51 में त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR समरूप हैं। त्रिभुज PQR की शेष भुजाओं को ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.51

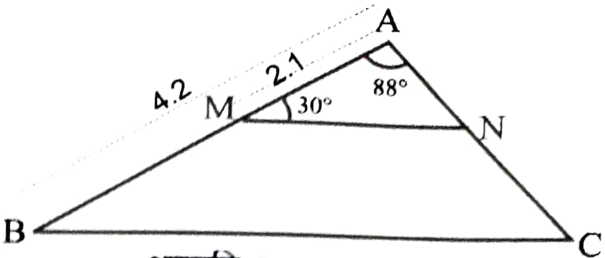
4. आकृति 5.52 में, त्रिभुज ABC में, MN, BC के समान्तर है। ΔABC के शेष कोणों की माप बताइए। क्या त्रिभुज ABC और त्रिभुज AMN समरूप होंगे ?



आकृति 5.52

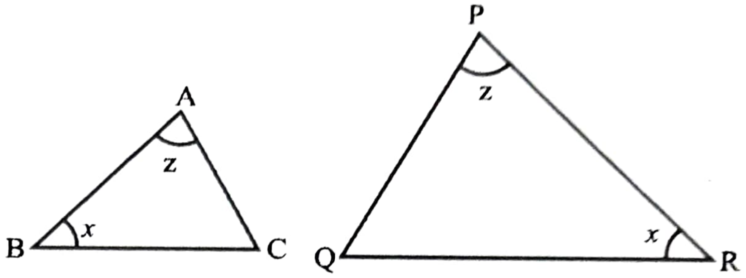
5. उपर्युक्त आकृति 5.53 में, यदि M तथा N क्रमशः AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु हों, तो भुजा BC और MN का अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. दो समान्तर रेखाखंड AB और CD खींचिए। A को D से और B को C से मिलाइए। मान लीजिए कि वे एक दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं। क्या त्रिभुज OAB और त्रिभुज ODC समरूप होंगे ?



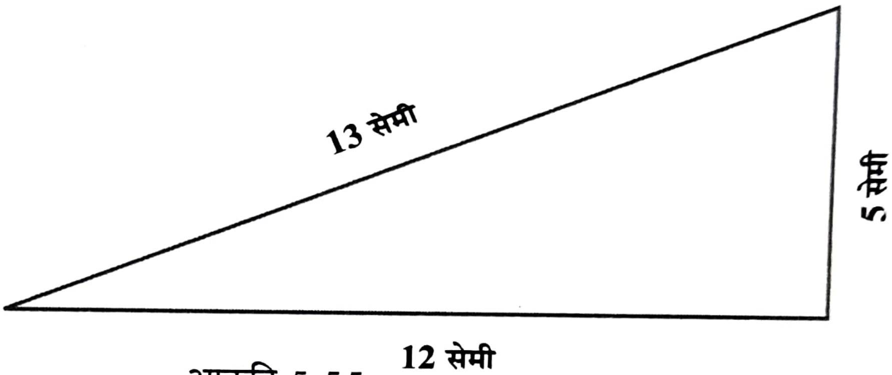
आकृति 5.53

7. क्या आकृति 5.54 में त्रिभुज ABC और त्रिभुज PRQ समरूप हैं ? यदि हाँ, तो कारण बताइए।



आकृति 5.54

8. 20 मी = 1 सेमी मान कर एक खेत का आकार आकृति 5.55 में दर्शाया गया है। 40 मीटर = 1 सेमी मान कर खेत का नया आकार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दर्शाइए।



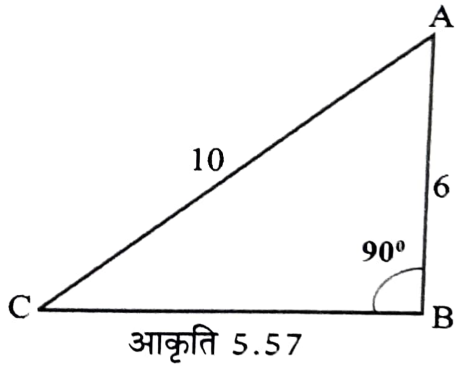
आकृति 5.55

दक्षता अभ्यास - 5

1. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$, AB = 6.0 सेमी, AC = 10 सेमी, तो BC की माप होगी :

(i) 6 सेमी **(ii)** 10 सेमी

(iii) 8 सेमी **(iv)** इनमें से कोई नहीं

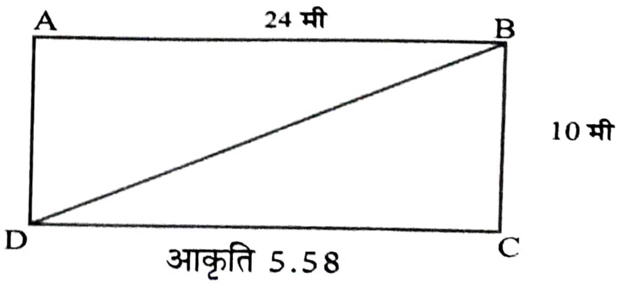


आकृति 5.57

2. एक आयताकार मैदान की लम्बाई 24 मी, चौड़ाई 10 मी है। इस आयताकार मैदान का विकर्ण होगा :

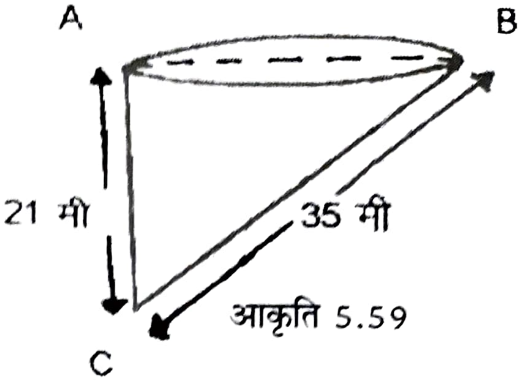
(i) 26 मीटर **(ii)** 29 मीटर

(iii) 20 मीटर **(iv)** 24 मीटर



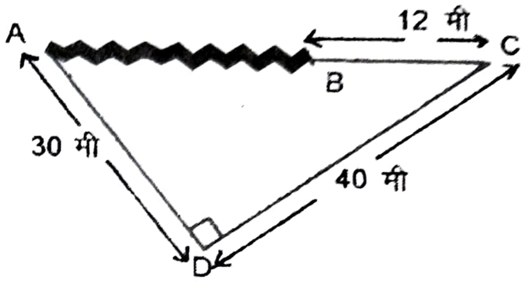
आकृति 5.58

3. एक सर्वेक्षक (Surveyor) बिन्दु A और B के बीच की दूरी ज्ञात करना चाहता है किन्तु वह A से B तक सीधा नहीं पहुँच सकता, अतः वह चित्रानुसार एक समकोण त्रिभुज बनाता है जिसमें AC = 21 मी, BC = 35 मी, AB कितना लम्बा है ?



आकृति 5.59

4. बिन्दु A B एक हैं। एक सर्वेक्षक A और B के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए आकृति 5.60 के अनुसार एक समकोण त्रिभुज ADC बनाता है। बिन्दु A से बिन्दु B के बीच की दूरी कितनी है, जबकि BC = 12 मीटर।



आकृति 5.60

(संकेत - समकोण ΔADC में)

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$= 30^2 + 40^2$

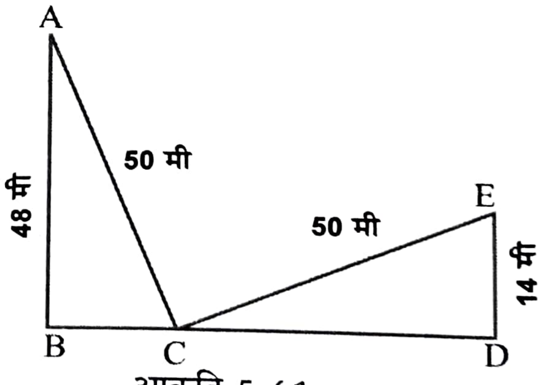
$= 900 + 1600$

$AC^2 = 2500$

$AC = 50$ मीटर

$\therefore AB = AC - BC = 50 - 12 = 38$ मीटर

5. एक सड़क के दोनों किनारों पर दो मकान आमने-सामने हैं। 50 मी लम्बी सीढ़ी का एक सिरा सड़क के एक ओर स्थित मकान की दीवार पर 48 मी ऊँचाई तक पहुँचता है तथा दूसरे किनारे वाले मकान की दीवार पर यह केवल 14 मीटर ऊँचाई तक पहुँचता है। सड़क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.61

(संकेत-चित्रानुसार सड़क की चौड़ाई BD = BC + CD)

6. उस त्रिभुज का नाम बताइए जिसके परिकेन्द्र और अन्तः बिन्दु एक ही होते हैं।

7. 3.4, 5 पाइथागोरियन त्रिक हैं। इस त्रिक के तीन अपवर्त्य त्रिक भी लिखिए। दिखाइए कि 15, 20, 25 भी पाइथोगोरियन त्रिक हैं।

8. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसका आधार 7 सेमी., $\angle B = 60^\circ$ तथा दो भुजाओं का योग 9 सेमी है।

9. एक ΔABC की रचना कीजिए, जिसका एक कोण 120° तथा दो भुजाएँ क्रमशः 5 सेमी तथा 6 सेमी है, तो त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात करें।

10. समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजा 6 सेमी हो, तो त्रिभुज का केन्द्रक तथा शीर्ष से केन्द्रक तक की दूरी ज्ञात करें।

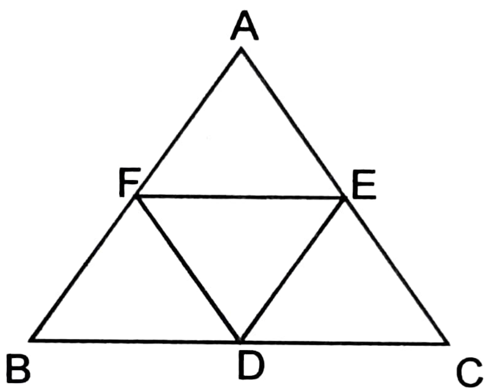
11. एक त्रिभुज PQR की भुजाओं में 4:5:6 का अनुपात है। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए। जिसका आधार 8 सेमी हो।

12. किसी त्रिभुज के तल पर स्थित बिन्दु जो त्रिभुज की भुजाओं से बराबर लम्बवत् दूरी पर है, वह बिन्दु त्रिभुज का (2006)

(i) अन्तःकेन्द्र होता है। **(ii)** परिकेन्द्र होता है।

(iii) लम्बकेन्द्र होता है। **(iv)** केन्द्रक होता है।

13. संलग्न चित्र में DEF का क्षेत्रफल होगा (2007)



DEF भुजाओं के मध्य बिन्दु है

(i) $\frac{1}{2}\ \Delta ABC$ **(ii)** $\frac{1}{3}\ \Delta ABC$

(iii) $\frac{1}{4}\ \Delta ABC$ **(iv)** ΔABC

इस इकाई में हमने सीखा

1. समकोण त्रिभुज में समकोण के सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं । यह समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं से बड़ी होती है ।
2. किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है । इसे पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं ।
3. किसी रेखा के बाहर दिये हुए किसी बिन्दु से जो भी रेखाखंड इस रेखा तक खींचे जा सकते हैं, उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है ।

4. यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा पर बना वर्ग, शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है । यही प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है ।

5. यदि a, b, c पाइथागोरियन त्रिक है तथा k एक धन पूर्णांक है तो $ak, bk,$ और ck भी पाइथागोरियन त्रिक है ।

6. त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गये लम्ब रेखाखंड को त्रिभुज का **शीर्ष लम्ब** (Altitude) कहते है । त्रिभुज में तीन शीर्ष होते हैं।

7. एक त्रिभुज के शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं। त्रिभुज के शीर्ष लम्बों (तीनों) के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का **लम्ब केन्द्र** (Orthocentre) कहते है ।

8. त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की **माध्यिका** (Median) कहते है ।

9. त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती है । वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएं मिलती हैं, माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु या त्रिभुज का केन्द्रक (Centroid) कहलाता है।

10. त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते है। त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circum Centre) कहते हैं ।

11. त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अंतः केन्द्र (Incentre) कहते हैं।

12. (i) दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है, समरूप होते हैं, यदि
   (a) उनके संगत कोण बराबर हों, और
   (b) उनकी संगत भुजाएं समान अनुपात में हों ।

   (ii) यदि त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो, तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं ।

   (iii) यदि दो त्रिभुजों के कोण समान हों, तो उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं ।

अभ्यास 5 (a)

1. (ii) 10; सेमी **2.** (iii) 5 सेमी; **3.** (i) x^2, (ii) 5^2, (iii) p^2, (iv) 8^2; **4.** 25 सेमी; **5.** 12 सेमी; **6.** 60 डेसीमी; **7.** 10 मी; **9.** (i) (5, 12, 13), (iv) (8, 15, 17), (v) (3, 4, 5)

अभ्यास 5 (b)

2. (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, **3.** AC और BC का प्रतिच्छेद बिन्दु C

अभ्यास 5 (c)

1. (i) मध्य बिन्दु, (ii) संगामी, (iii) केन्द्रक, **2.** (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य; **3.** (ii) समद्विबाहु।

अभ्यास 5 (d)

1. हाँ; **2.** हाँ, परिकेन्द्र

अभ्यास 5 (e)

1. (i) हाँ, (ii) हाँ, (iii) हाँ; **2.** सत्य; **3.** हाँ

अभ्यास 5 (f)

1. 2, 4, 5; **2.** नहीं; **3.** PQ = 1 सेमी, PR = 1.4 सेमी; **4.** $\angle B = 30$, $\angle C = 62^0$, हाँ; **5.** 2 : 1, **6.** हाँ, **7.** हाँ, क्योंकि $\angle C = \angle Q = 180^0 - (x + z)$; **8.** 2.5 सेमी, 6 सेमी, 6.2 सेमी

दक्षता अभ्यास 5

1. (iii) 8 सेमी; **2.** (i) 26 मीटर; **3.** AB = 28 मीटर; **4.** AC = 38 मीटर; **5.** 62 मीटर; **6.** समबाहु त्रिभुज; **7.** (6, 8, 10), (12, 16, 20), (18, 24, 30); **10.** 3 सेमी **11.** अंतःकेन्द्र; **12.** (iii) $\frac{1}{4}\Delta$ ABC